Modèle pour variable multi-classes

Arbres de décision

David Causeur
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Agrocampus Rennes
IRMAR CNRS UMR 6625
http://www.agrocampus-rennes.fr/math/causeur/

Plan du cours

Choix d'une marque par un consommateur

La marque préférée est-elle la même selon l'âge et le sexe ?

	Gender	Age	Brand
1	M	24	M1
2	M	26	M3
3	M	26	M1
4	F	27	M2
5	F	27	M3
6	M	27	M2
⋮	⋮	⋮	

Choix d'une marque par un consommateur

La marque préférée est-elle la même selon l'âge et le sexe ?

	Gender	Age	Brand
1	M	24	M1
2	M	26	M3
3	M	26	M1
4	F	27	M2
5	F	27	M3
6	M	27	M2
⋮	⋮	⋮	

Age : variable quantitative

Choix d'une marque par un consommateur

La marque préférée est-elle la même selon l'âge et le sexe ?

	Gender	Age	Brand
1	M	24	M1
2	M	26	M3
3	M	26	M1
4	F	27	M2
5	F	27	M3
6	M	27	M2
⋮	⋮	⋮	

Age : variable quantitative

Marque : variable qualitative à 3 modalités

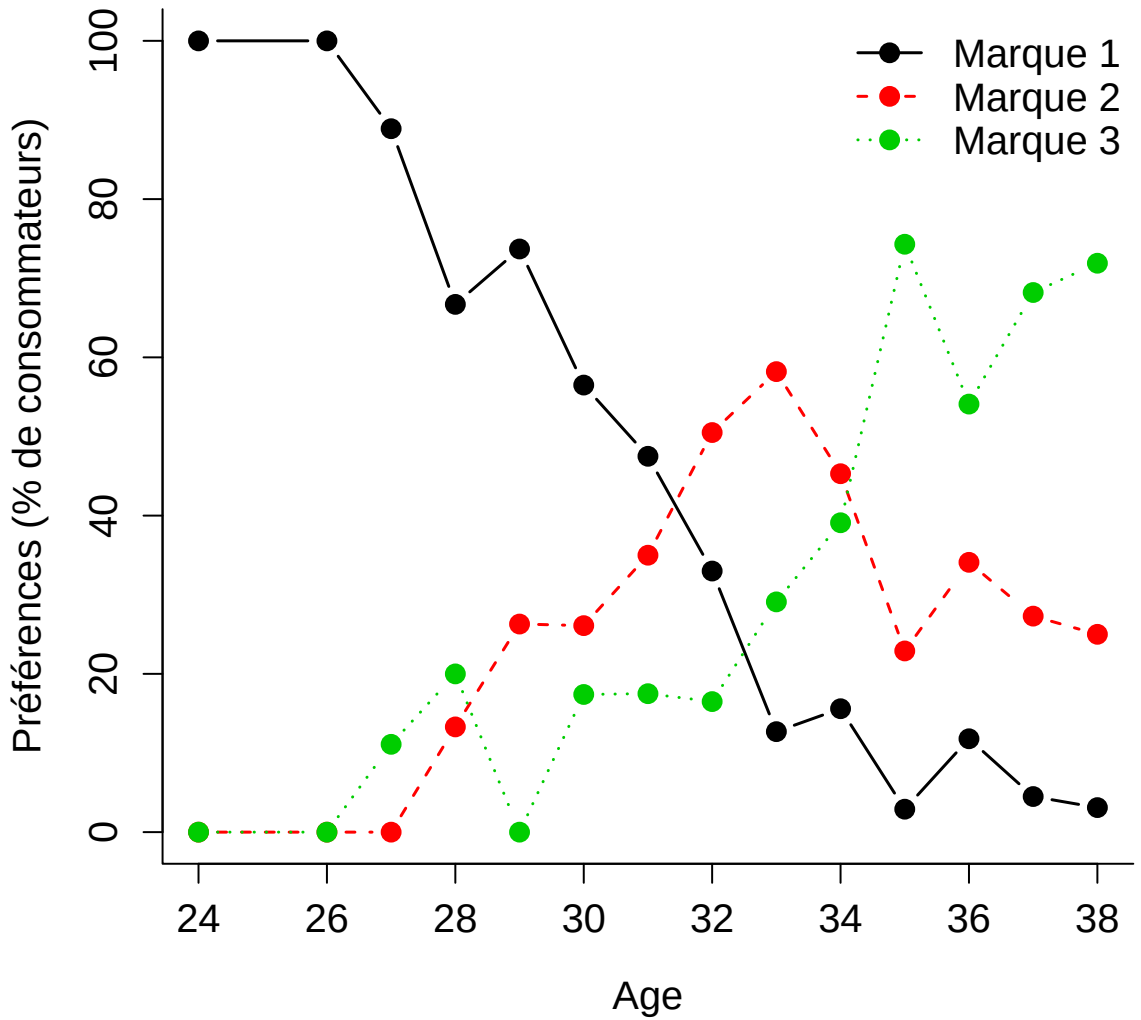
Choix d'une marque par un consommateur

	Marque			
Age	M1	M2	M3	Total
24	1	0	0	1
26	2	0	0	2
27	8	0	1	9
28	10	2	3	15
29	14	5	0	19
30	13	6	4	23
31	19	14	7	40
32	110	168	55	333
33	7	32	16	55
34	10	29	25	64
35	1	8	26	35
36	10	29	46	85
37	1	6	15	22
38	1	8	23	32

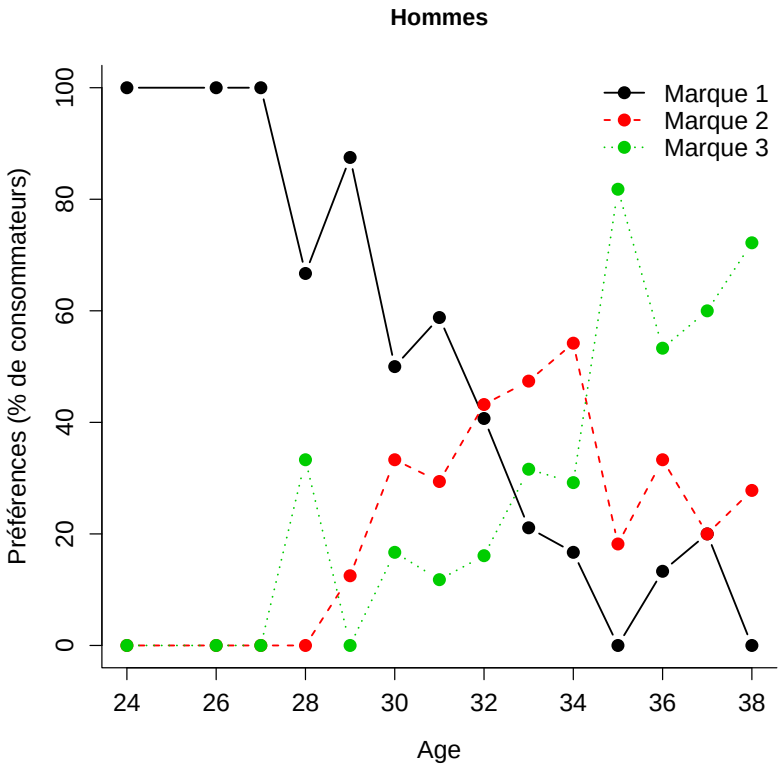
Choix d'une marque par un consommateur

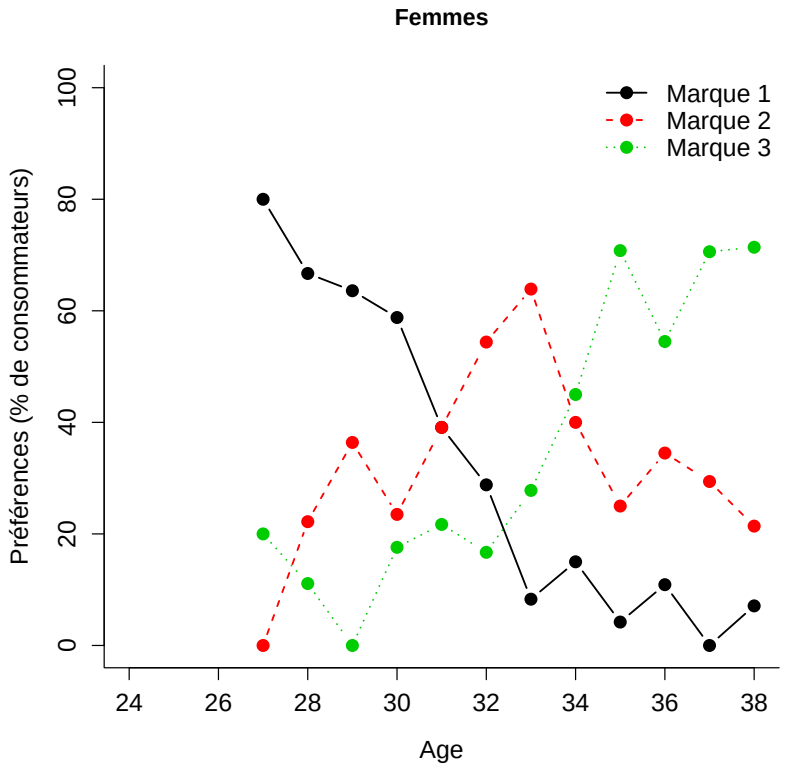
	Marque			
Age	M1	M2	M3	Total
24	100.0	0.0	0.0	100.0
26	100.0	0.0	0.0	100.0
27	88.9	0.0	11.1	100.0
28	66.7	13.3	20.0	100.0
29	73.7	26.3	0.0	100.0
30	56.5	26.1	17.4	100.0
31	47.5	35.0	17.5	100.0
32	33.0	50.5	16.5	100.0
33	12.7	58.2	29.1	100.0
34	15.6	45.3	39.1	100.0
35	2.9	22.9	74.3	100.1
36	11.8	34.1	54.1	100.0
37	4.5	27.3	68.2	100.0
38	3.1	25.0	71.9	100.0

Choix d'une marque par un consommateur



Choix d'une marque par un consommateur





Plan du cours

Y qualitative nominale

Y qualitative à K modalités ($C_1,\ C_2,\ \ldots, C_K$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = C_k) &= \pi_k, \\ \pi_1 + \ldots + \pi_K &= 1 \end{aligned}$$

Pour x fixé :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(Y = C_k) &= \pi_k(x), \\ \pi_1(x) + \ldots + \pi_K(x) &= 1 \end{aligned}$$

Y qualitative nominale

Y qualitative à K modalités ($C_1,\ C_2,\ \ldots, C_K$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = C_k) &= \pi_k, \quad \text{Exemple : proba. que la marque k} \\ \pi_1 + \ldots + \pi_K &= 1 \qquad \text{soit choisie} \end{aligned}$$

Pour x fixé :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(Y = C_k) &= \pi_k(x), \quad \text{Exemple : proba. que la marque k} \\ \pi_1(x) + \ldots + \pi_K(x) &= 1 \qquad \text{soit choisie à l'âge x} \end{aligned}$$

Modélisation logistique multinomiale

$Y \in \{C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_K\}$ **Modèle logistique multinomial** :

$$\begin{aligned}
\log\left[\pi_2(x)/\pi_1(x)\right] &= L(x;\beta^{(2)}),\\
\log\left[\pi_3(x)/\pi_1(x)\right] &= L(x;\beta^{(3)}),\\
&\vdots \qquad\quad \vdots\\
\log\left[\pi_K(x)/\pi_1(x)\right] &= L(x;\beta^{(K)}).
\end{aligned}$$

Modélisation logistique multinomiale

$Y \in \{C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_K\}$ **Modèle logistique multinomial** :

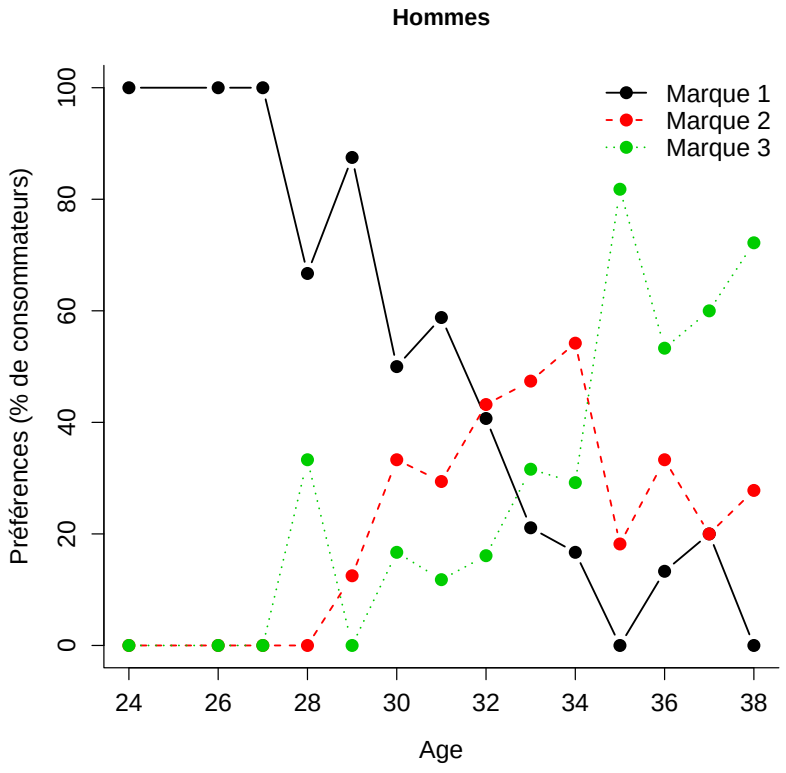
$$\begin{aligned}
\log\left[\pi_2(x)/\pi_1(x)\right] &= L(x;\beta^{(2)}),\\
\log\left[\pi_3(x)/\pi_1(x)\right] &= L(x;\beta^{(3)}),\\
&\vdots \qquad\quad \vdots\\
\log\left[\pi_K(x)/\pi_1(x)\right] &= L(x;\beta^{(K)}).
\end{aligned}$$

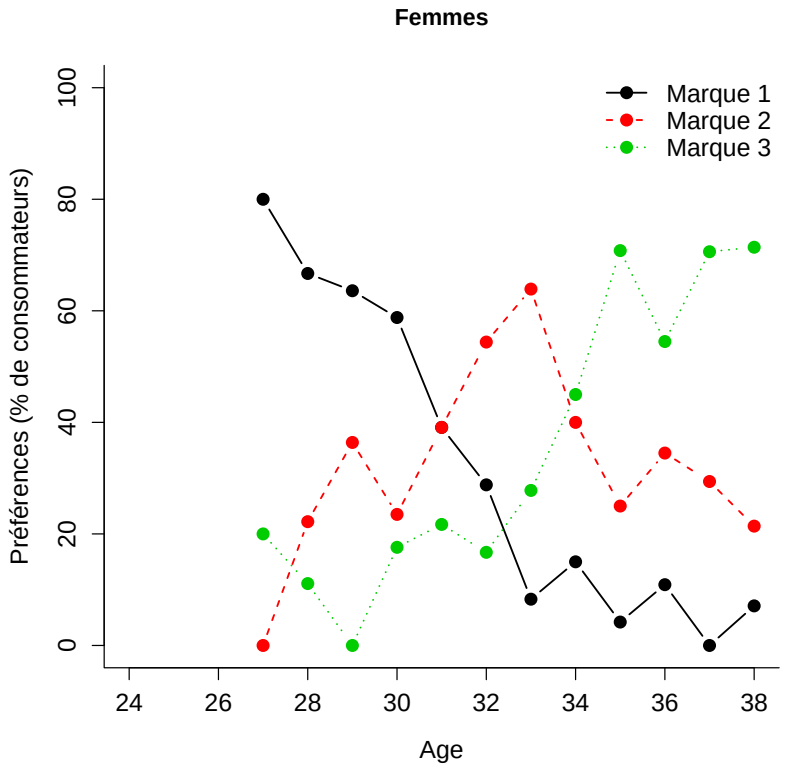
Exemple : Préférence de la marque

$$\begin{aligned}
\log\left[\pi_2(x)/\pi_1(x)\right] &= \mu^{(2)} + \alpha_i^{(2)} + \left[\beta^{(2)} + \gamma_i^{(2)}\right] x,\\
\log\left[\pi_3(x)/\pi_1(x)\right] &= \mu^{(3)} + \alpha_i^{(3)} + \left[\beta^{(3)} + \gamma_i^{(3)}\right] x.
\end{aligned}$$

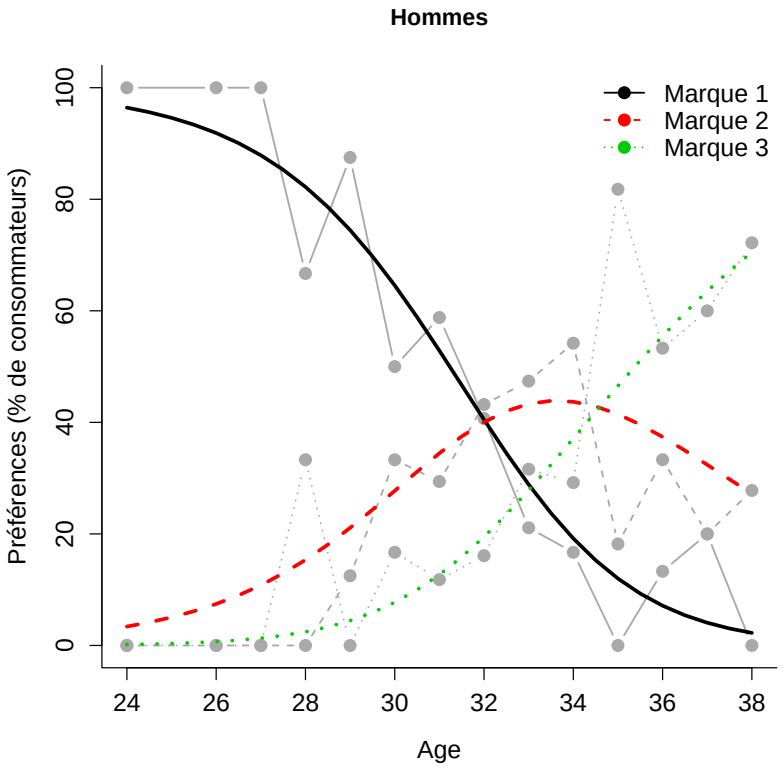
Soit 8 paramètres

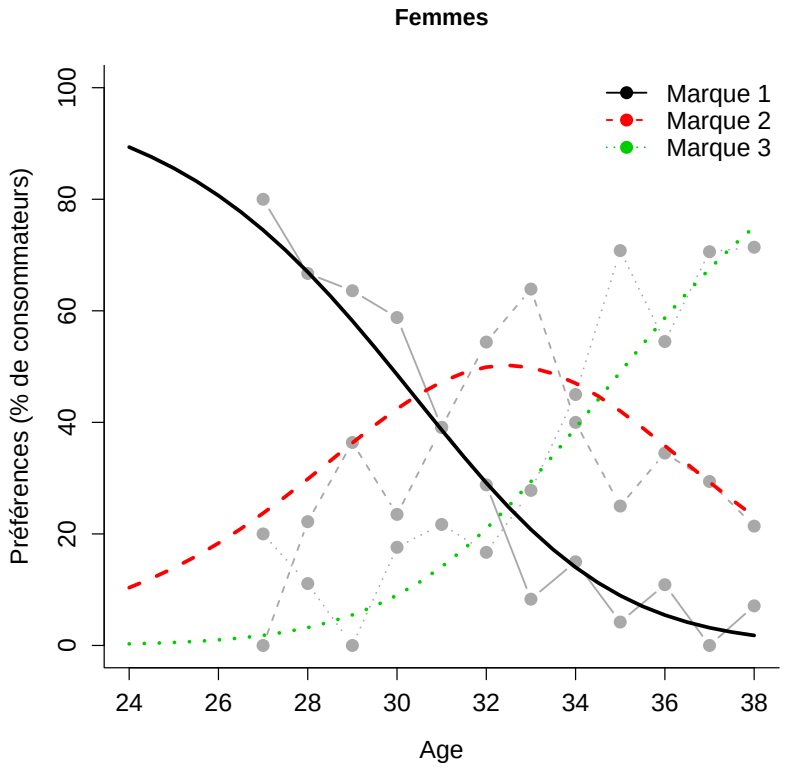
Modélisation logistique multinomiale





Modélisation logistique multinomiale





Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Pour chaque β,

$$
\begin{aligned}
\pi_1(x) &= \frac{1}{1+\exp\left[L(x;\beta^{(2)})\right]+\ldots+\exp\left[L(x;\beta^{(K)})\right]},\\
\pi_2(x) &= \frac{\exp L(x;\beta^{(2)})}{1+\exp\left[L(x;\beta^{(2)})\right]+\ldots+\exp\left[L(x;\beta^{(K)})\right]},\\
\pi_3(x) &= \frac{\exp L(x;\beta^{(3)})}{1+\exp\left[L(x;\beta^{(2)})\right]+\ldots+\exp\left[L(x;\beta^{(K)})\right]},\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
\pi_K(x) &= \frac{\exp L(x;\beta^{(K)})}{1+\exp\left[L(x;\beta^{(2)})\right]+\ldots+\exp\left[L(x;\beta^{(K)})\right]}.
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{V}(\beta) = \mathbb{P}_{x_1}(Y = y_1)\mathbb{P}_{x_2}(Y = y_2)\ldots\mathbb{P}_{x_n}(Y = y_n)$$

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Pour chaque β**,** pour les données *marque*

$$\begin{aligned}
\pi_1(x) &= \frac{1}{1+\exp\left[L(x;\beta^{(2)})\right]+\exp\left[L(x;\beta^{(3)})\right]},\\
\pi_2(x) &= \frac{\exp L(x;\beta^{(2)})}{1+\exp\left[L(x;\beta^{(2)})\right]+\exp\left[L(x;\beta^{(3)})\right]},\\
\pi_3(x) &= \frac{\exp L(x;\beta^{(3)})}{1+\exp\left[L(x;\beta^{(2)})\right]+\exp\left[L(x;\beta^{(3)})\right]}.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{V}(\beta)=\mathbb{P}_{x_1=24}(Y=M_1)\mathbb{P}_{x_2=26}(Y=M_3)\ldots\mathbb{P}_{x_n=38}(Y=M_3)$$

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

	Coefficients			
	(Intercept)	Age	Gender[T.M]	Age:Gender[T.M]
M2	-10.23018	0.3364944	-3.1265847	0.08055698
M3	-22.00349	0.6772655	-0.9954803	0.01858241
	Écarts-types			
	(Intercept)	Age	Gender[T.M]	Age:Gender[T.M]
M2	2.263182	0.07058379	3.656095	0.1136942
M3	2.629088	0.08062280	4.205734	0.1286519
Residual deviance: 1405.142				
AIC: 1421.142				

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

	Coefficients			
	(Intercept)	Age	Gender[T.M]	Age:Gender[T.M]
M2	-10.23018	0.3364944	-3.1265847	0.08055698
M3	-22.00349	0.6772655	-0.9954803	0.01858241
	Écarts-types			
	(Intercept)	Age	Gender[T.M]	Age:Gender[T.M]
M2	2.263182	0.07058379	3.656095	0.1136942
M3	2.629088	0.08062280	4.205734	0.1286519
Residual deviance: 1405.142				
AIC: 1421.142				

Analyse de la déviance

Analysis of deviance

	Model	Resid. df	Resid. dev	Test	Df	LR stat	Pr (Chi)
1	1	1468	1591.792				
2	Age	1466	1413.593	1 vs 2	2	178.1989779	0.00000000
3	Age + Gender	1464	1405.941	2 vs 3	2	7.6512358	0.02180496
4	Age * Gender	1462	1405.142	3 vs 4	2	0.7996223	0.67044664

Analyse de la déviance

Analysis of deviance

	Model	Resid. df	Resid. dev	Test	Df	LR stat	Pr (Chi)
1	1	1468	1591.792				
2	Age	1466	1413.593	1 vs 2	2	178.1989779	0.00000000
3	Age + Gender	1464	1405.941	2 vs 3	2	7.6512358	0.02180496
4	Age * Gender	1462	1405.142	3 vs 4	2	0.7996223	0.67044664

Analyse de la déviance

Maximum de vraisemblance

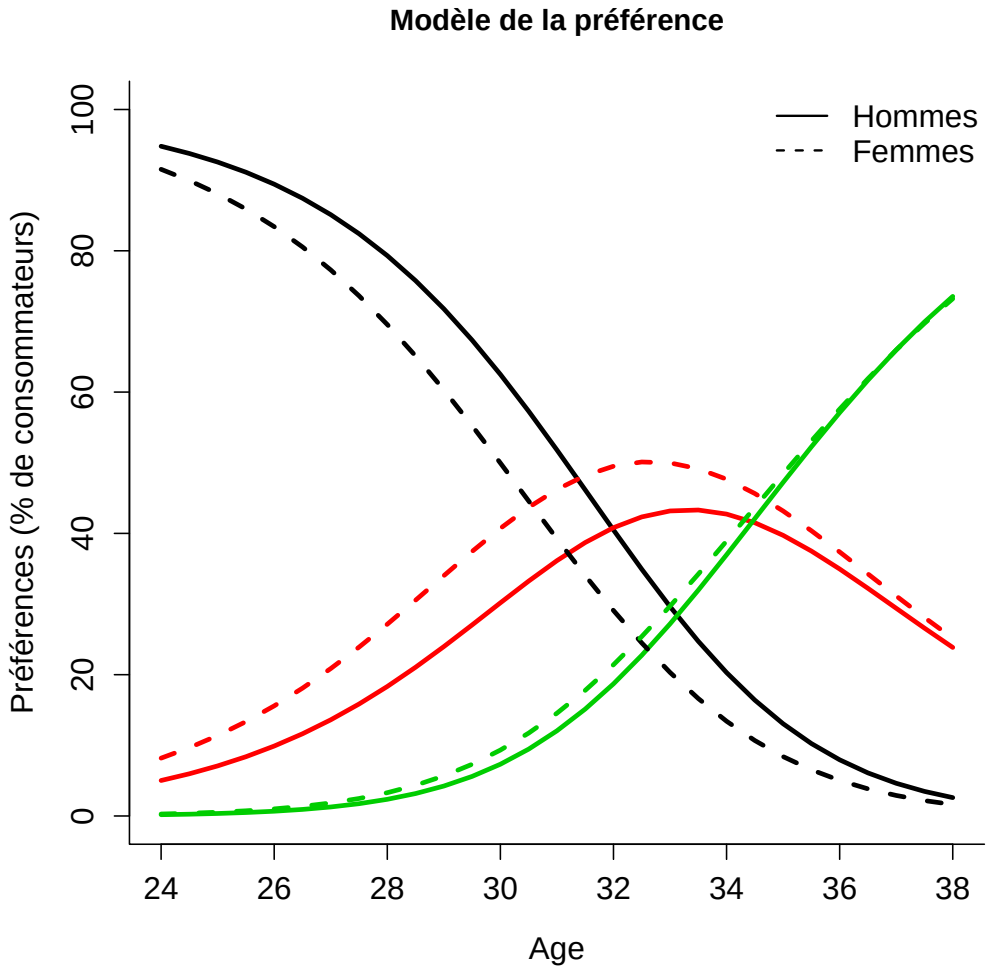
	Coefficients		
	(Intercept)	Age	Gender[T.M]
M2	-11.25127	0.3682202	-0.5237736
M3	-22.25571	0.6859149	-0.4658215
	Écarts-types		
	(Intercept)	Age	Gender[T.M]
M2	1.765184	0.05500373	0.1942473
M3	2.042636	0.06262721	0.2260901
Residual deviance: 1405.941			
AIC: 1417.941			

Analyse de la déviance

Maximum de vraisemblance

	Coefficients		
	(Intercept)	Age	Gender[T.M]
M2	-11.25127	0.3682202	-0.5237736
M3	-22.25571	0.6859149	-0.4658215
	Écarts-types		
	(Intercept)	Age	Gender[T.M]
M2	1.765184	0.05500373	0.1942473
M3	2.042636	0.06262721	0.2260901
Residual deviance: 1405.941			
AIC: 1417.941			

Analyse de la déviance



Modèle pour la pression systolique

La pression sanguine dépend-t'elle du poids ?

	Gender	Weight	Sbp
1	F	71.66759	2
2	F	82.10022	2
3	M	78.01789	2
4	M	107.50139	3
5	F	77.11070	2
6	M	74.84274	1
⋮	⋮	⋮	

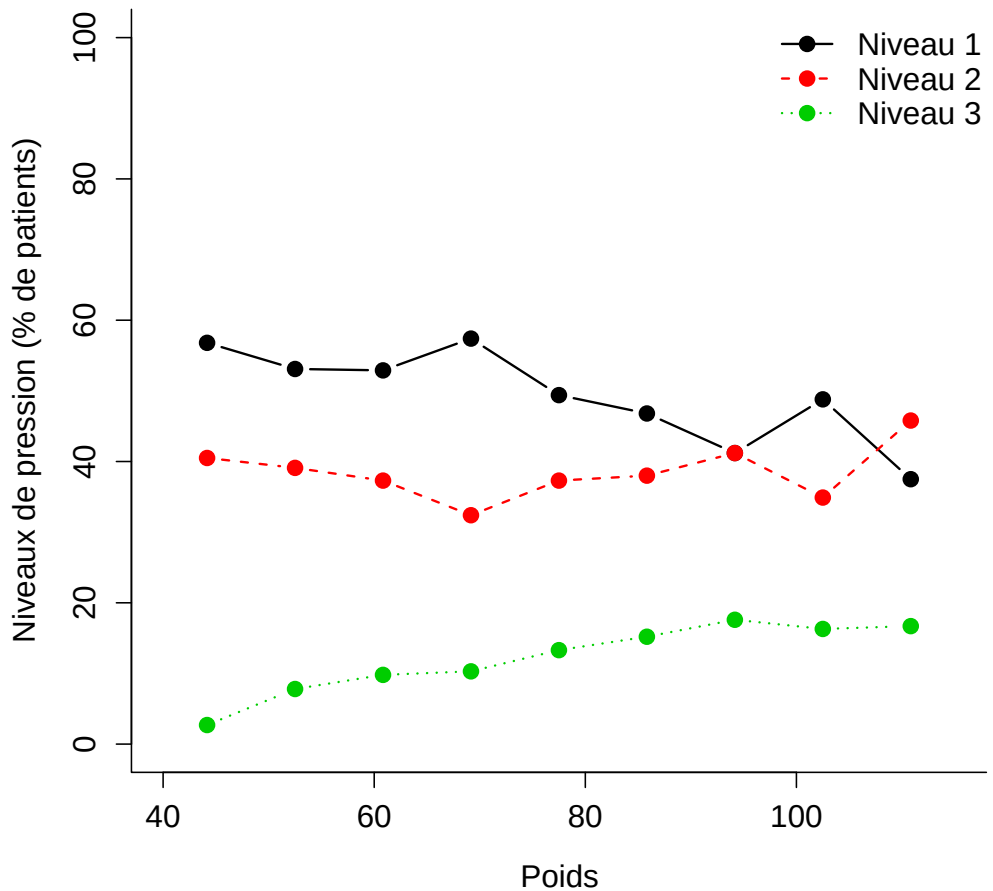
Modèle pour la pression systolique

La pression sanguine dépend-t'elle du poids ?

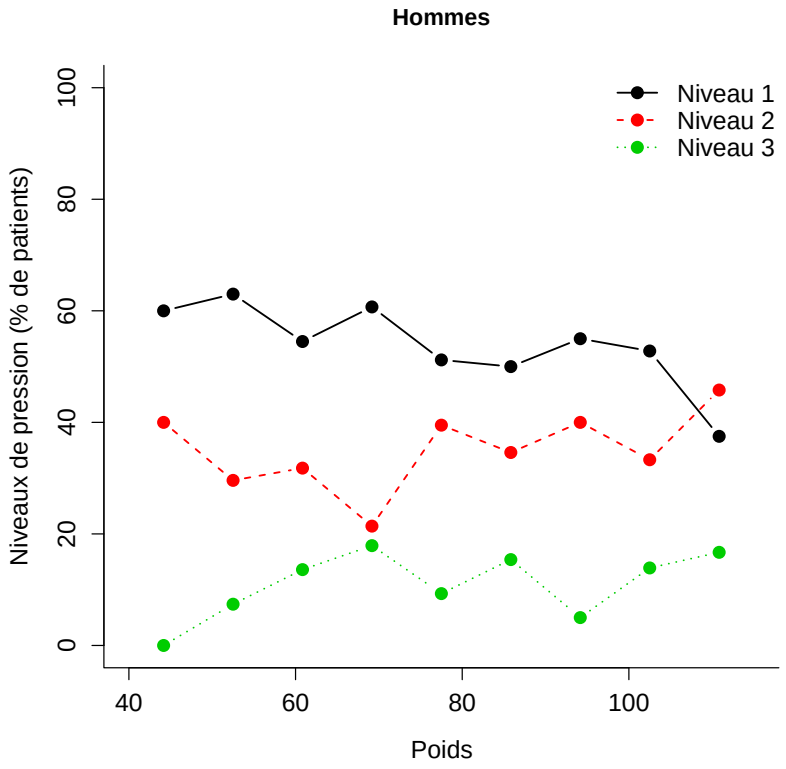
	Marque			
Weights	1	2	3	Total
(40,48.3]	56.8	40.5	2.7	100.0
(48.3,56.7]	53.1	39.1	7.8	100.0
(56.7,65]	52.9	37.3	9.8	100.0
(65,73.3]	57.4	32.4	10.3	100.1
(73.3,81.7]	49.4	37.3	13.3	100.0
(81.7,90]	46.8	38.0	15.2	100.0
(90,98.3]	41.2	41.2	17.6	100.0
(98.3,107]	48.8	34.9	16.3	100.0
(107,115]	37.5	45.8	16.7	100.0

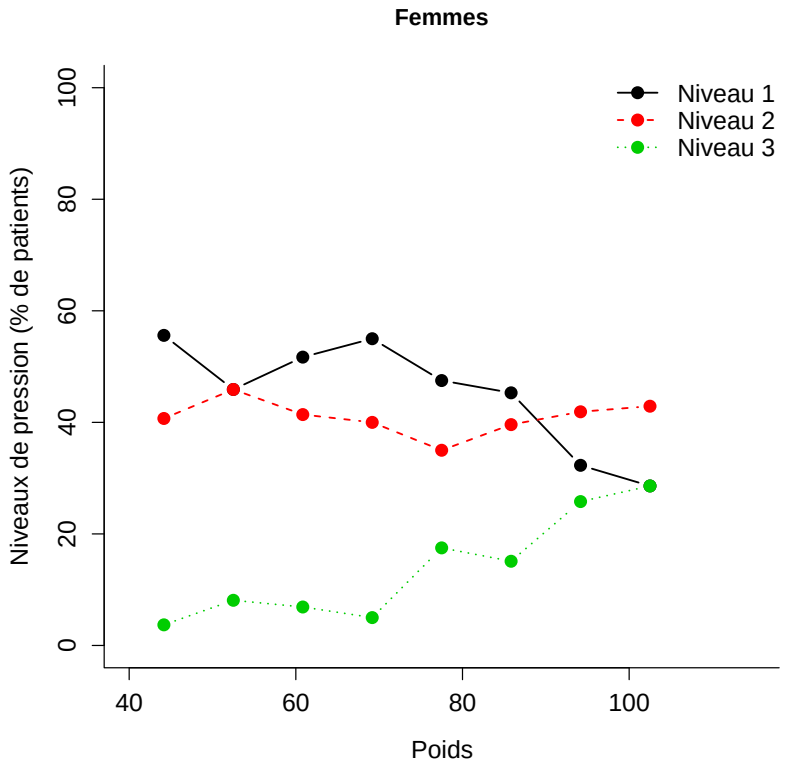
Modèle pour la pression systolique

La pression sanguine dépend-t'elle du poids ?



Modèle pour la pression systolique





Y qualitative ordinale

$Y \in \{C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_K\}$

3 types de modèles du risque :

- Risques adjacents : relatifs à la modalité suivante.

$$\log\left[\frac{\pi_k(x)}{\pi_{k+1}(x)}\right] \quad = \quad L(x;\beta^{(k)})$$

Y qualitative ordinale

$Y \in \{C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_K\}$

3 types de modèles du risque :

- Risques adjacents : relatifs à la modalité suivante.

$$\log\left[\frac{\pi_k(x)}{\pi_{k+1}(x)}\right] = L(x;\beta^{(k)})$$

- Risques séquentiels : relatifs aux modalités supérieures.

$$\log\left[\frac{\pi_k(x)}{\pi_{k+1}(x)+\ldots+\pi_K(x)}\right] = L(x;\beta^{(k)})$$

Y qualitative ordinale

$Y \in \{C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_K\}$

3 types de modèles du risque :

- Risques adjacents : relatifs à la modalité suivante.

$$\log\left[\frac{\pi_k(x)}{\pi_{k+1}(x)}\right] = L(x;\beta^{(k)})$$

- Risques séquentiels : relatifs aux modalités supérieures.

$$\log\left[\frac{\pi_k(x)}{\pi_{k+1}(x)+\ldots+\pi_K(x)}\right] = L(x;\beta^{(k)})$$

- Risques cumulatifs : le risque que la variable à expliquer soit inférieure à une modalité est calculé par rapport aux modalités supérieures.

$$\log\left[\frac{\pi_1(x)+\ldots+\pi_k(x)}{\pi_{k+1}(x)+\ldots+\pi_K(x)}\right] = L(x;\beta^{(k)})$$

Modèle à risques cumulatifs

$K-1$ modèles logit :

$$\begin{aligned}
\log\left[\frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)+\ldots+\pi_K(x)}\right] &= L(x;\beta^{(1)}),\\
\log\left[\frac{\pi_1(x)+\pi_2(x)}{\pi_3(x)+\ldots+\pi_K(x)}\right] &= L(x;\beta^{(2)}),\\
&\vdots \quad\quad \vdots\\
\log\left[\frac{\pi_1(x)+\ldots+\pi_{K-1}(x)}{\pi_K(x)}\right] &= L(x;\beta^{(K-1)}).
\end{aligned}$$

Modèle à risques cumulatifs

$K-1$ modèles logit :

$$\begin{aligned}
\log\left[\frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)+\ldots+\pi_K(x)}\right] &= L(x;\beta^{(1)}),\\
\log\left[\frac{\pi_1(x)+\pi_2(x)}{\pi_3(x)+\ldots+\pi_K(x)}\right] &= L(x;\beta^{(2)}),\\
&\vdots \quad\quad \vdots\\
\log\left[\frac{\pi_1(x)+\ldots+\pi_{K-1}(x)}{\pi_K(x)}\right] &= L(x;\beta^{(K-1)}).
\end{aligned}$$

Données *Pression sanguine*

$$\begin{aligned}
\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)}{\pi_{2i}(x)+\pi_{3i}(x)}\right] &= \mu^{(1)}+\alpha_i^{(1)}+\left[\beta^{(1)}+\gamma_i^{(1)}\right]x,\\
\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)+\pi_{2i}(x)}{\pi_{3i}(x)}\right] &= \mu^{(2)}+\alpha_i^{(2)}+\left[\beta^{(2)}+\gamma_i^{(2)}\right]x.
\end{aligned}$$

Modélisation de la pression sanguine

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)}{\pi_{2i}(x)+\pi_{3i}(x)}\right] = \mu^{(1)}+\alpha_i^{(1)}+\left[\beta^{(1)}+\gamma_i^{(1)}\right]x,$$

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)+\pi_{2i}(x)}{\pi_{3i}(x)}\right] = \mu^{(2)}+\alpha_i^{(2)}+\left[\beta^{(2)}+\gamma_i^{(2)}\right]x.$$

Modélisation de la pression sanguine

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)}{\pi_{2i}(x)+\pi_{3i}(x)}\right] = \mu^{(1)}+\alpha_i^{(1)}+\left[\beta^{(1)}+\gamma_i^{(1)}\right]x,$$

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)+\pi_{2i}(x)}{\pi_{3i}(x)}\right] = \mu^{(2)}+\alpha_i^{(2)}+\left[\beta^{(2)}+\gamma_i^{(2)}\right]x.$$

Attention : problème si les prédicteurs se croisent

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)}{\pi_{2i}(x)+\pi_{3i}(x)}\right] > \log\left[\frac{\pi_{1i}(x)+\pi_{2i}(x)}{\pi_{3i}(x)}\right]$$

Modélisation de la pression sanguine

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)}{\pi_{2i}(x)+\pi_{3i}(x)}\right] = \mu^{(1)}+\alpha_i^{(1)}+\left[\beta^{(1)}+\gamma_i^{(1)}\right]x,$$

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)+\pi_{2i}(x)}{\pi_{3i}(x)}\right] = \mu^{(2)}+\alpha_i^{(2)}+\left[\beta^{(2)}+\gamma_i^{(2)}\right]x.$$

Attention : problème si les prédicteurs se croisent

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)}{\pi_{2i}(x)+\pi_{3i}(x)}\right] > \log\left[\frac{\pi_{1i}(x)+\pi_{2i}(x)}{\pi_{3i}(x)}\right],$$

$$\pi_{1i}(x)\pi_{3i}(x) > [\pi_{1i}(x)+\pi_{2i}(x)]\,[\pi_{3i}(x)+\pi_{2i}(x)]$$

Modélisation de la pression sanguine

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)}{\pi_{2i}(x)+\pi_{3i}(x)}\right] = \mu^{(1)}+\alpha_i^{(1)}+\left[\beta^{(1)}+\gamma_i^{(1)}\right]x,$$

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)+\pi_{2i}(x)}{\pi_{3i}(x)}\right] = \mu^{(2)}+\alpha_i^{(2)}+\left[\beta^{(2)}+\gamma_i^{(2)}\right]x.$$

Attention : problème si les prédicteurs se croisent

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)}{\pi_{2i}(x)+\pi_{3i}(x)}\right] > \log\left[\frac{\pi_{1i}(x)+\pi_{2i}(x)}{\pi_{3i}(x)}\right],$$

$$\pi_{1i}(x)\pi_{3i}(x) > [\pi_{1i}(x)+\pi_{2i}(x)]\,[\pi_{3i}(x)+\pi_{2i}(x)]$$

Modèle à risques proportionnels

$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)}{\pi_{2i}(x)+\pi_{3i}(x)}\right] = \mu^{(1)}+\alpha_i+[\beta+\gamma_i]\,x,$$
$$\log\left[\frac{\pi_{1i}(x)+\pi_{2i}(x)}{\pi_{3i}(x)}\right] = \mu^{(2)}+\alpha_i+[\beta+\gamma_i]\,x.$$

Risques proportionnels : odds-ratio

$$\mathrm{OR}_{1\to[2-3]} = \mathrm{OR}_{[1-2]\to 3}$$

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Données Pression sanguine

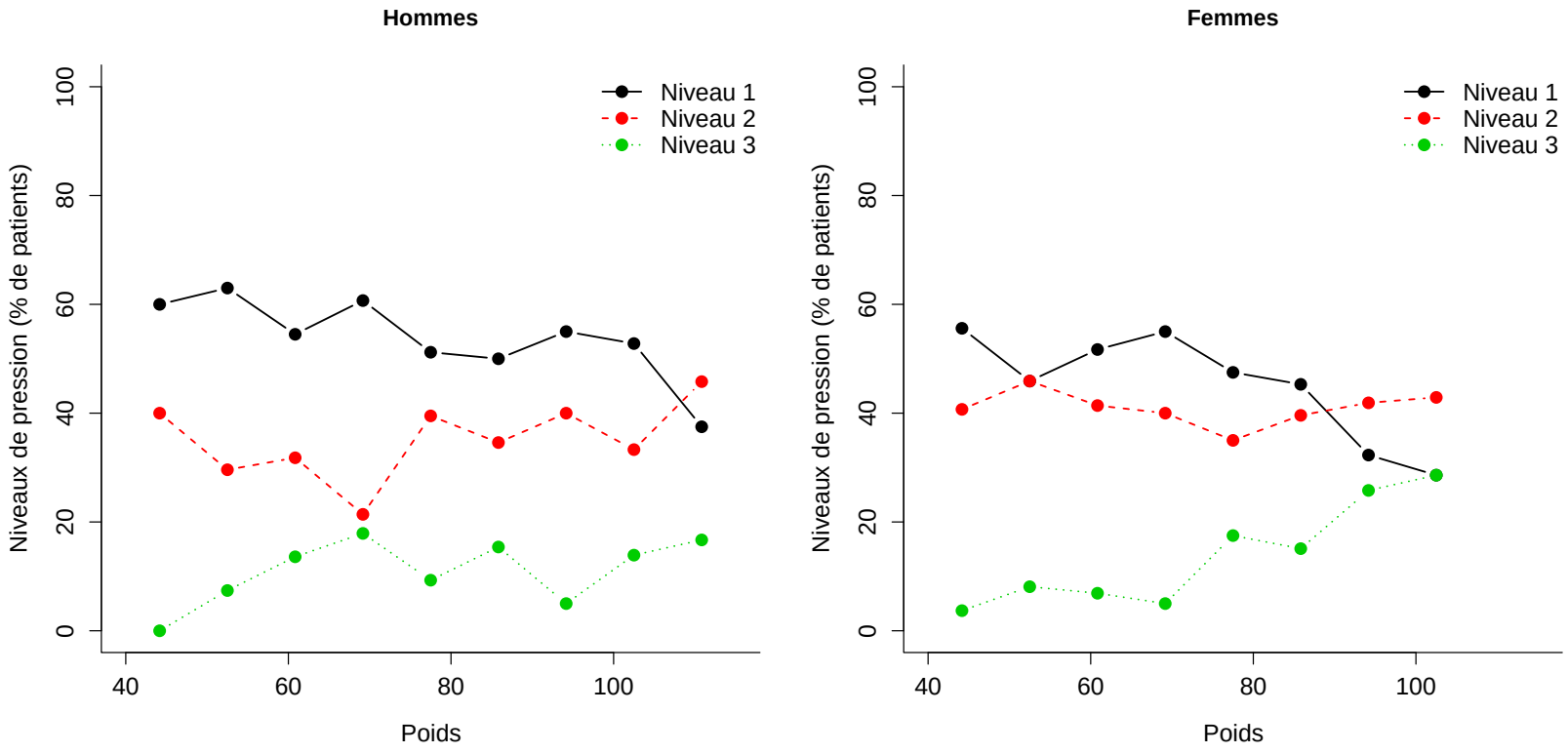
		Coefficients	
	Estimation	Écart-type	Stat. t
weight	0.019670849	0.007139504	2.7552124
genderM	0.212015362	0.754463596	0.2810147
weight:genderM	-0.007645852	0.009648443	-0.7924441
		Constantes	
	Estimation	Écart-type	Stat. t
1|2	1.2934	0.5235	2.4708
2|3	3.3040	0.5443	6.0702
Déviance résiduelle : 958.2028			
AIC : 968.2028			

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

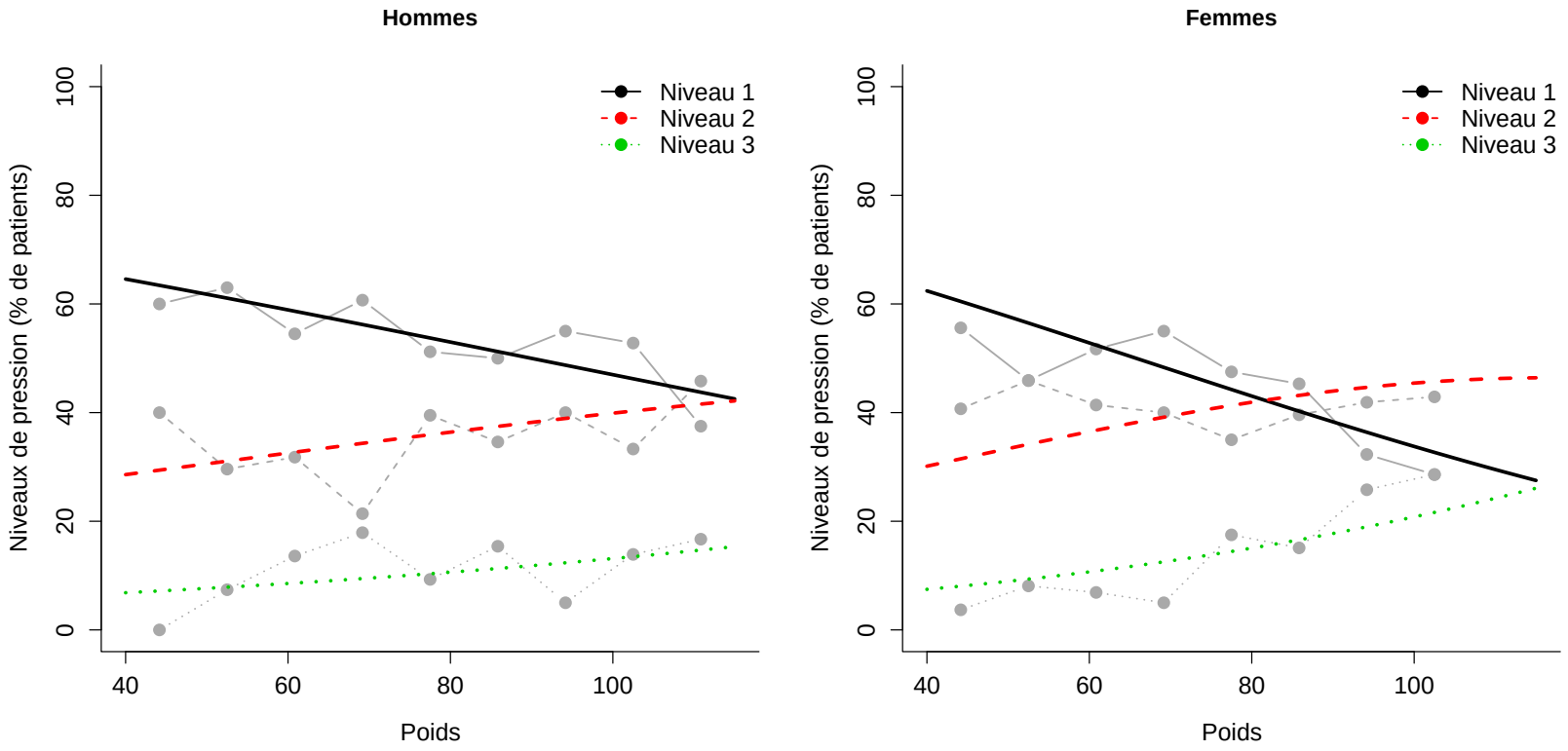
Données Pression sanguine

		Coefficients	
	Estimation	Écart-type	Stat. t
weight	0.019670849	0.007139504	2.7552124
genderM	0.212015362	0.754463596	0.2810147
weight:genderM	-0.007645852	0.009648443	-0.7924441
		Constantes	
	Estimation	Écart-type	Stat. t
1|2	1.2934	0.5235	2.4708
2|3	3.3040	0.5443	6.0702
Déviance résiduelle : 958.2028			
AIC : 968.2028			

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance



Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance



Analyse de la déviance

Analysis of deviance

	Model	Resid. df	Resid. dev	Test	Df	LR stat	Pr (Chi)
1	1	498	970.9707				
2	weight	497	963.0900	1 vs 2	1	7.8807009	0.004996511
3	weight + gender	496	958.8318	2 vs 3	1	4.2581469	0.039062510
4	weight * gender	495	958.2028	3 vs 4	1	0.6290315	0.427710781

Analyse de la déviance

Analysis of deviance

	Model	Resid. df	Resid. dev	Test	Df	LR stat	Pr (Chi)
1	1	498	970.9707				
2	weight	497	963.0900	1 vs 2	1	7.8807009	0.004996511
3	weight + gender	496	958.8318	2 vs 3	1	4.2581469	0.039062510
4	weight * gender	495	958.2028	3 vs 4	1	0.6290315	0.427710781

Analyse de la déviance

Données Pression sanguine

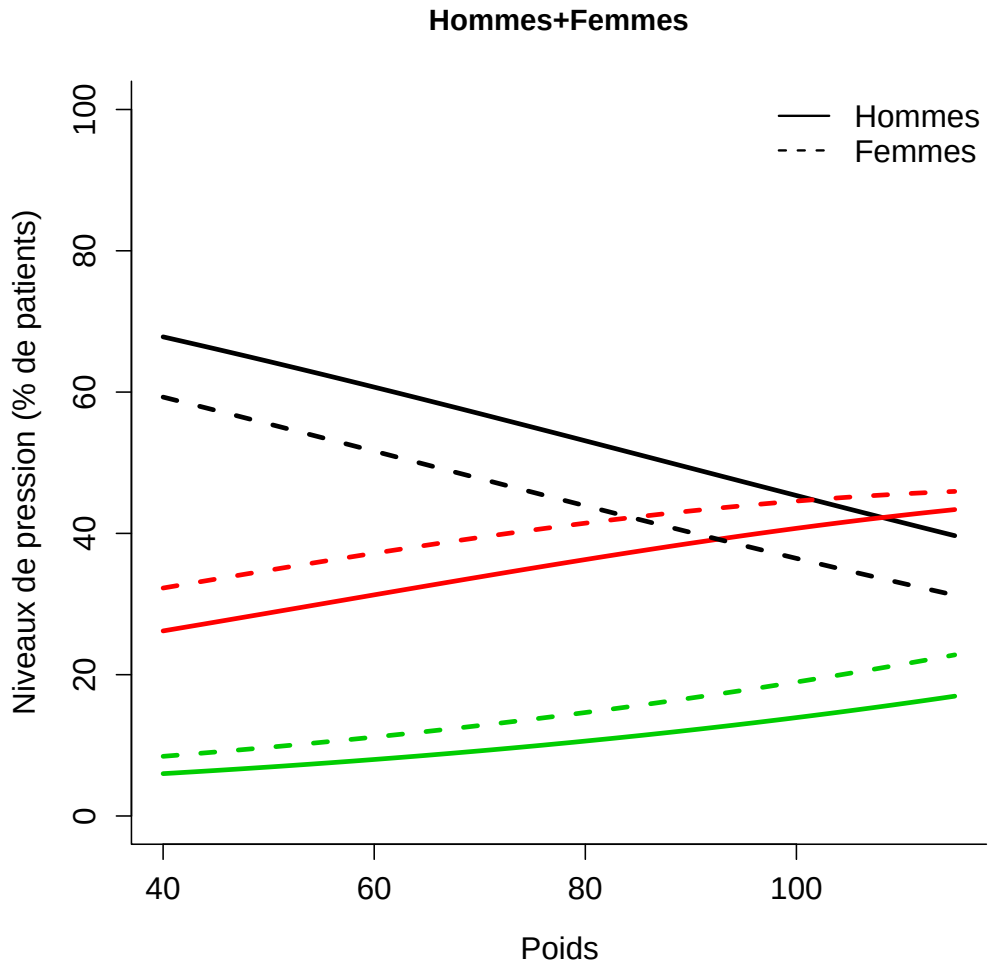
	Coefficients		
	Estimation	Écart-type	Stat. t
weight	0.01552393	0.004826471	3.216415
genderM	-0.36920906	0.179606541	-2.055655
	Constantes		
	Estimation	Écart-type	Stat. t
1|2	0.9970	0.3630	2.7463
2|3	3.0047	0.3880	7.7436
Déviance résiduelle : 958.8318			
AIC : 966.8318			

Analyse de la déviance

Données Pression sanguine

	Coefficients		
	Estimation	Écart-type	Stat. t
weight	0.01552393	0.004826471	3.216415
genderM	-0.36920906	0.179606541	-2.055655
	Constantes		
	Estimation	Écart-type	Stat. t
1|2	0.9970	0.3630	2.7463
2|3	3.0047	0.3880	7.7436
Déviance résiduelle : 958.8318			
AIC : 966.8318			

Analyse de la déviance



Règle de discrimination

Estimation du modèle à partir d'un échantillon

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_{1i}(x) &= \frac{\exp(\hat{\mu}^{(1)} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}x)}{1 + \exp(\hat{\mu}^{(1)} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}x)}, \\
\hat{\pi}_{1i}(x) + \hat{\pi}_{2i}(x) &= \frac{\exp(\hat{\mu}^{(2)} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}x)}{1 + \exp(\hat{\mu}^{(2)} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}x)}, \\
\hat{\pi}_{1i}(x) + \hat{\pi}_{2i}(x) + \hat{\pi}_{3i}(x) &= 1
\end{aligned}$$

Règle d'affectation pour un individu ($Sexe = i, Poids = x$)

Si $\hat{k} = \arg\max \{\hat{\pi}_{ki}(x)\}$, alors $\hat{Y} = k$.

Validation

Matrice de confusion (validation interne)

	Prédit			
Observé	1	2	3	Total
1	85.6	14.4	0	100
2	79.4	20.6	0	100
3	73.8	26.2	0	100

Taux d'erreurs très élevés

Plan du cours

Motivations

Inconvénients des méthodes de type *Scoring*

- Complexes si les variables explicatives sont nombreuses et de natures différentes
  Données Pression sanguine : Age, Sexe, Poids, Statut marital, Fumeur ou non, ...
- Peu intuitives par rapport à des règles récursives binaires :

  Si `Age < 35`, alors `Pression sanguine = 1`,

  Si `Age` $\geq$ `35` et `Fumeur = Non`, alors `Pression sanguine = 1`, ...

Règles binaires

Règle binaire : Si $C(x)$ alors $\hat{Y} = y$

- Si x est quantitative, $C(x)$ est de la forme $x < s$
- Si x est qualitative nominale $[x \in \{A, B, C\}]$
  $C(x)$ est de la forme $x \in \{A, C\}$
- Si x est qualitative ordinale $[x \in \{A \leq B \leq C\}]$
  $C(x)$ est de la forme $x \leq B$

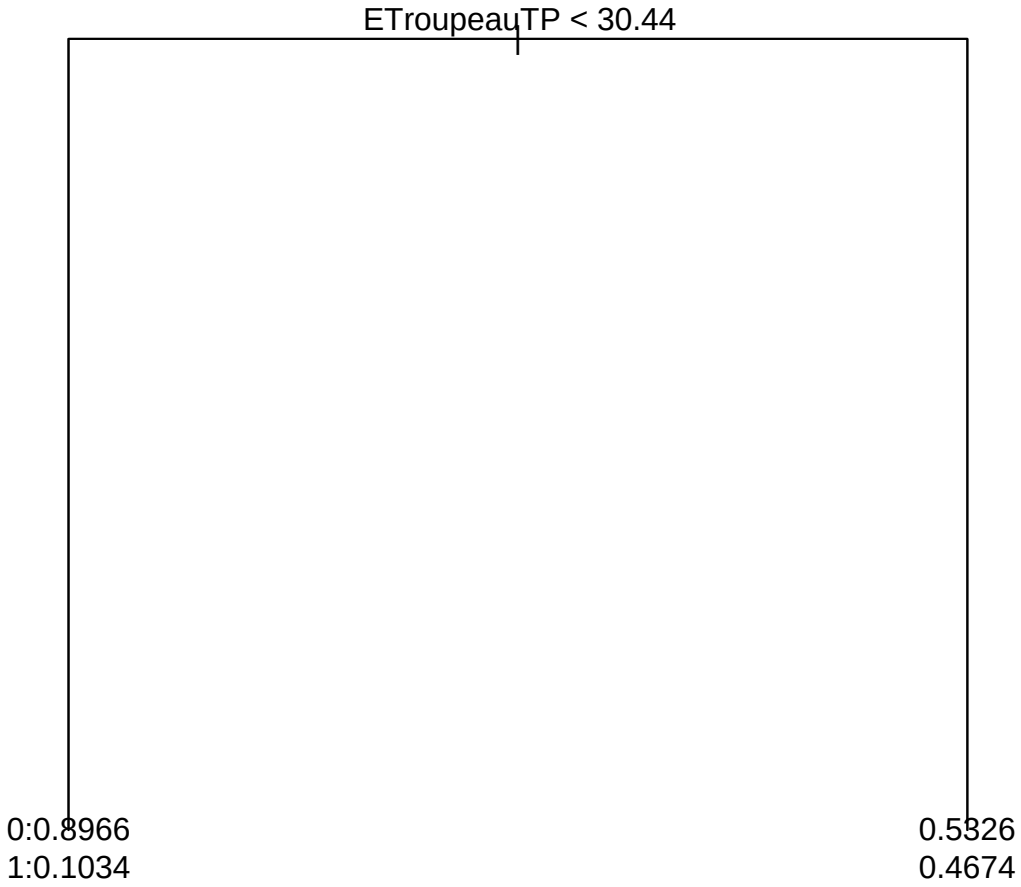
Règles binaires

Règle binaire : Si $C(x)$ alors $\hat{Y} = y$

- Si x est quantitative, $C(x)$ est de la forme $x < s$
- Si x est qualitative nominale $[x \in \{A, B, C\}]$
  $C(x)$ est de la forme $x \in \{A, C\}$
- Si x est qualitative ordinale $[x \in \{A \leq B \leq C\}]$
  $C(x)$ est de la forme $x \leq B$

Nœuds d'une règle binaire : sous-ensemble des individus vérifiant $C(x)$ et sous-ensemble des individus vérifiant $\bar{C}(x)$

Règles binaires



Règles binaires

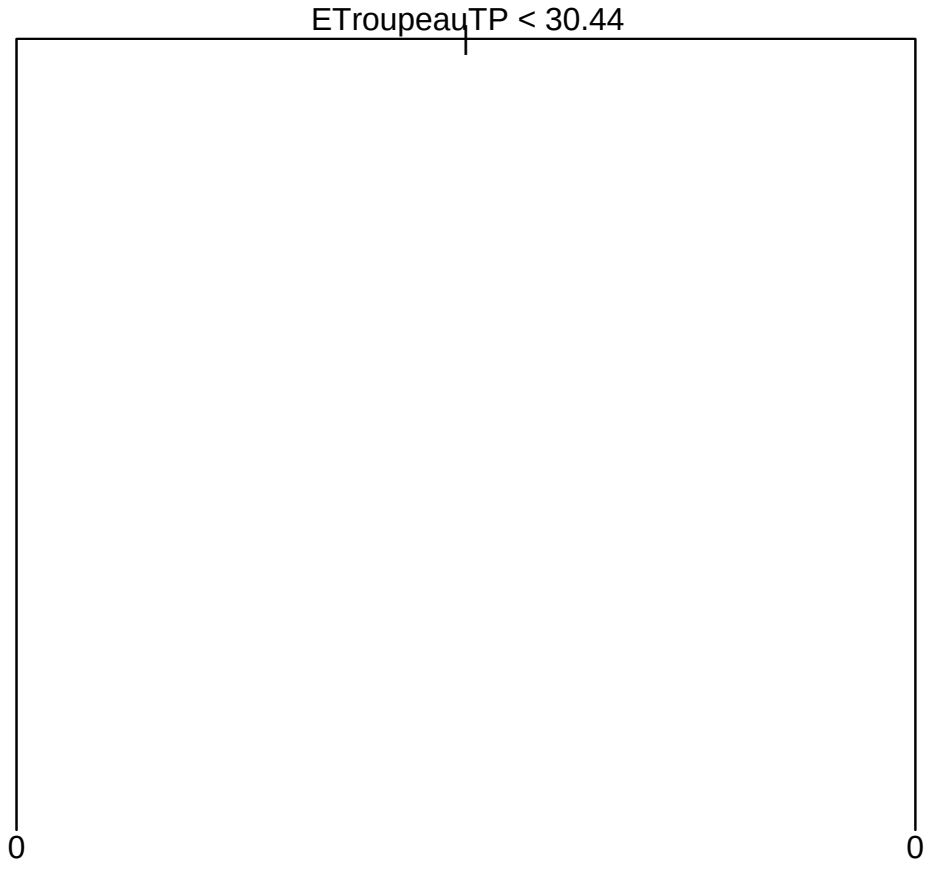
Règle binaire : Si $C(x)$ alors $\hat{Y} = y$

- Si x est quantitative, $C(x)$ est de la forme $x < s$
- Si x est qualitative nominale $[x \in \{A, B, C\}]$
  $C(x)$ est de la forme $x \in \{A, C\}$
- Si x est qualitative ordinale $[x \in \{A \leq B \leq C\}]$
  $C(x)$ est de la forme $x \leq B$

Nœuds d'une règle binaire : sous-ensemble des individus vérifiant $C(x)$ et sous-ensemble des individus vérifiant $\bar{C}(x)$

Affectation des individus d'un même noeud au groupe majoritaire dans ce noeud

Règles binaires

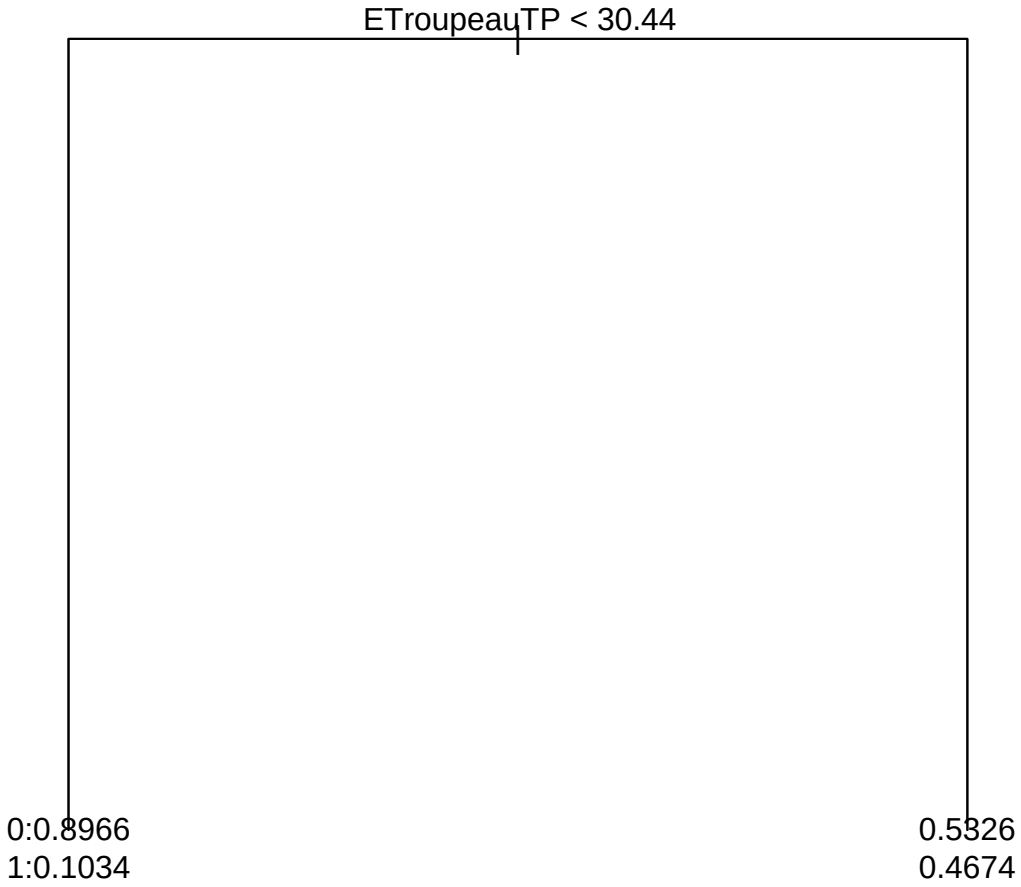


Qualité d'une règle binaire

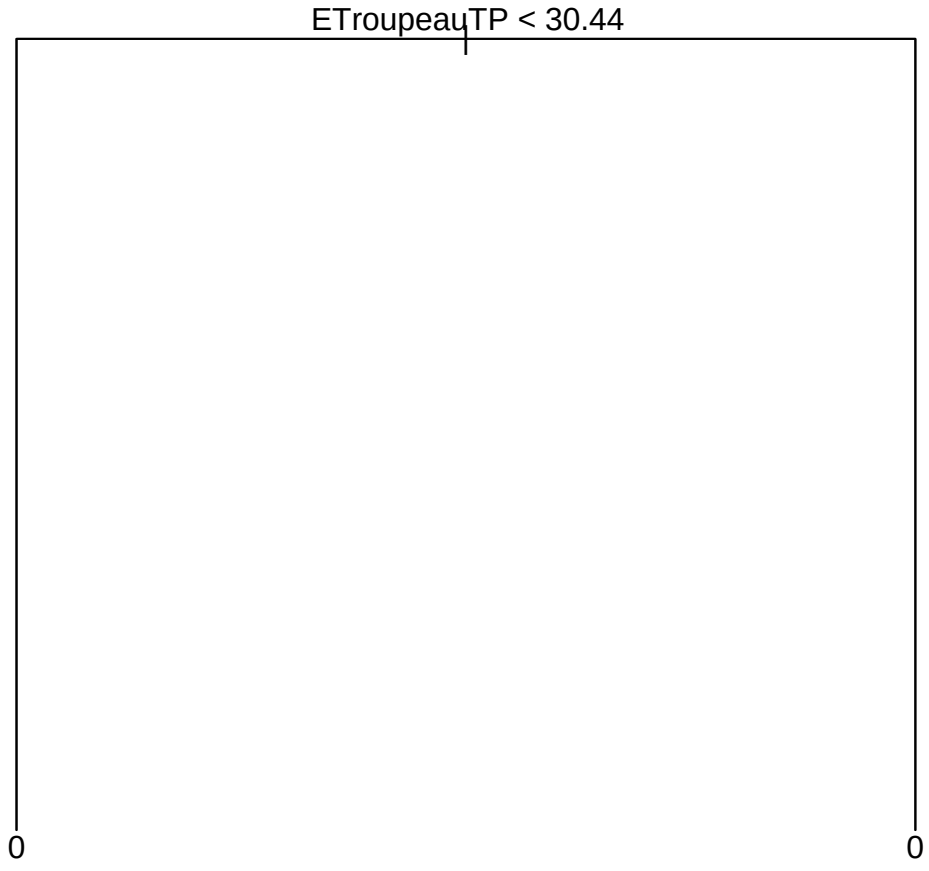
Critères de qualité

- Taux de bien classés [Uniquement qualité de classification]

Qualité d'une règle binaire



Qualité d'une règle binaire

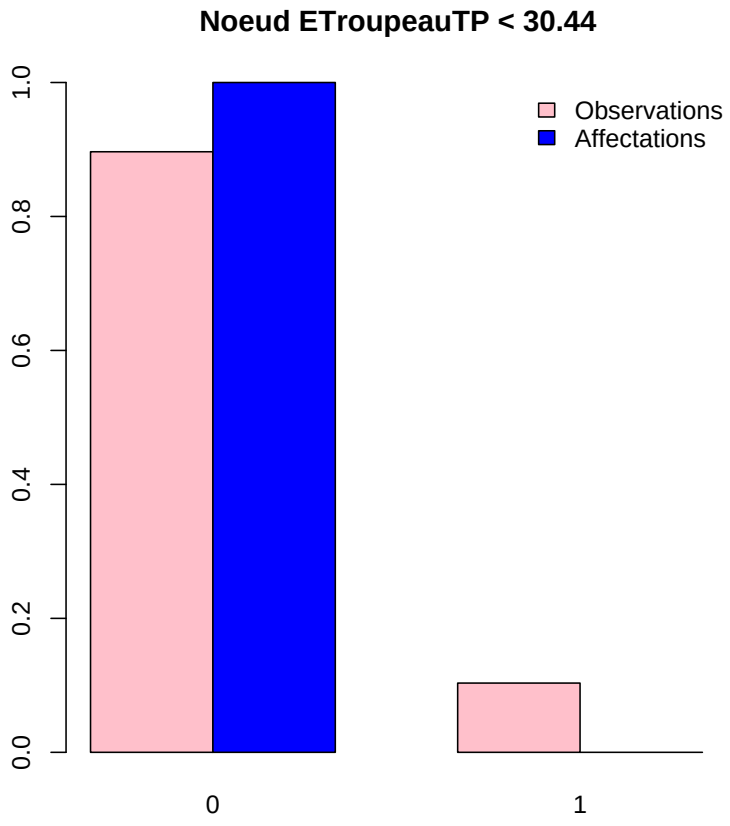


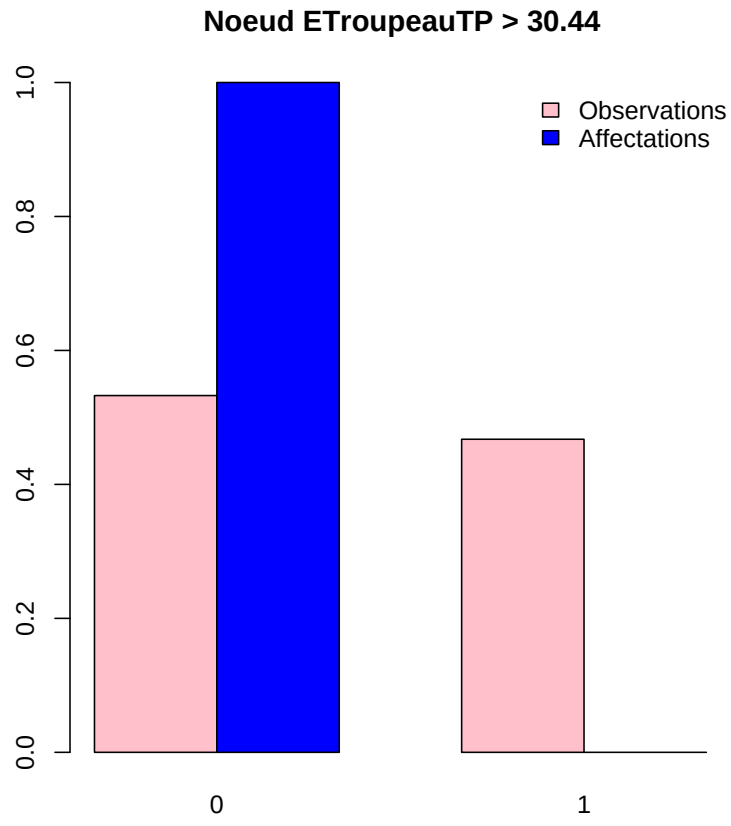
Qualité d'une règle binaire

Critères de qualité

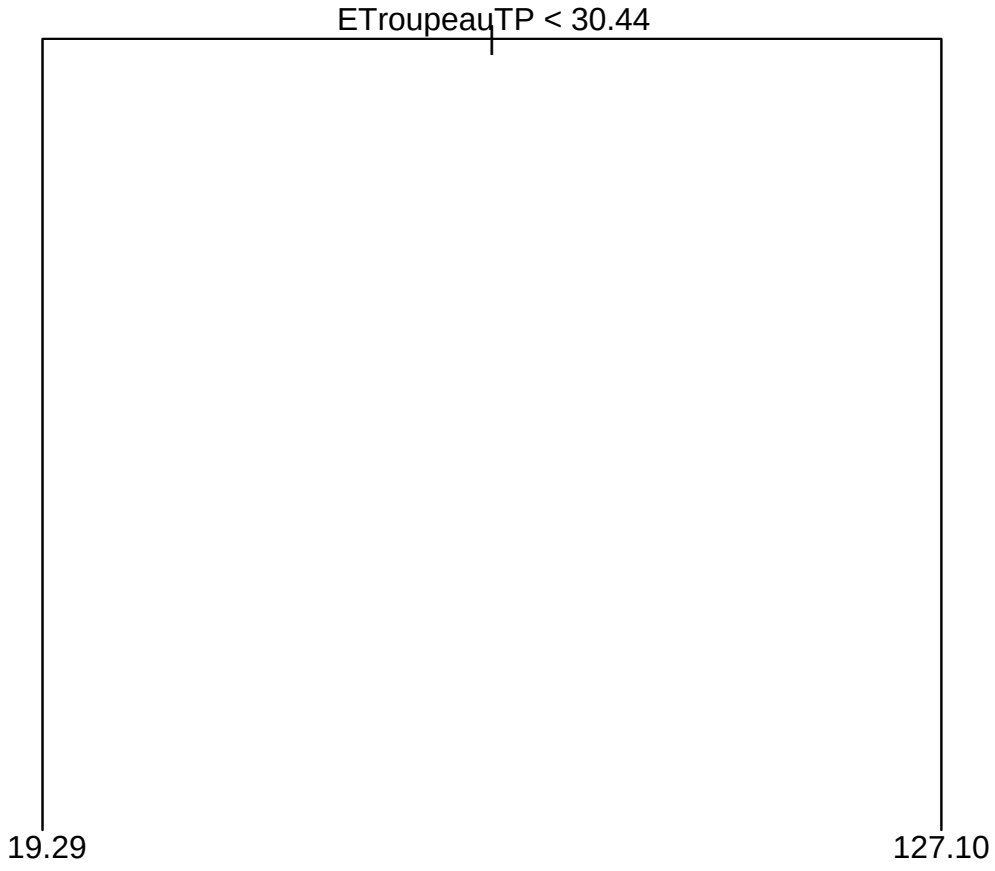
- Taux de bien classés [Uniquement qualité de classification]
- Déviance des noeuds de la règle

Qualité d'une règle binaire





Qualité d'une règle binaire

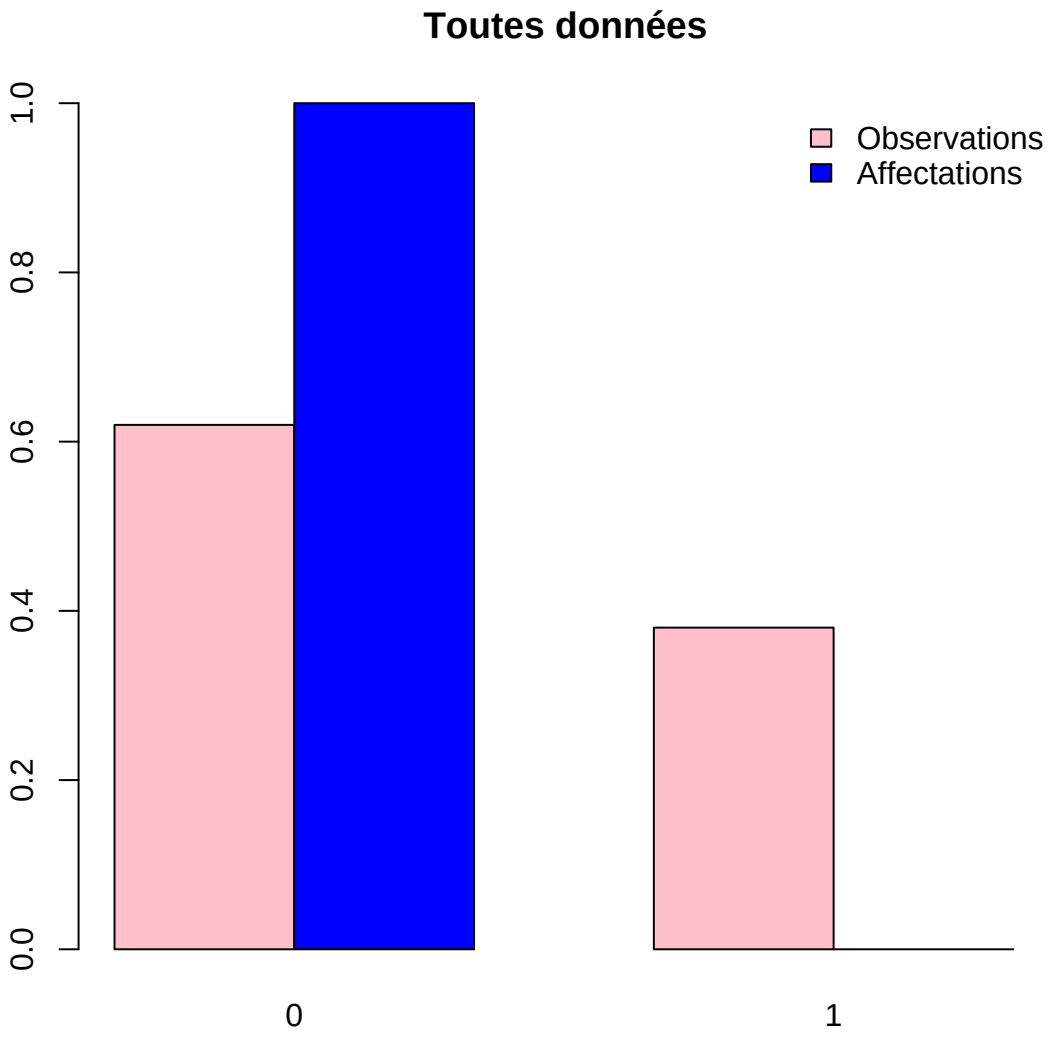


Qualité d'une règle binaire

Critères de qualité

- Taux de bien classés [Uniquement qualité de classification]
- Déviance des noeuds de la règle
  19.29 + 127.10 = 146.39 [Déviance de base = 160.70]

Qualité d'une règle binaire



Qualité d'une règle binaire

Critères de qualité

- Taux de bien classés [Uniquement qualité de classification]
- Déviance des noeuds de la règle
- Règle binaire optimale : minimisation de la déviance

Règle multivariée de classification

Arbre optimal : séquence de règles binaires optimales définies par récursivité

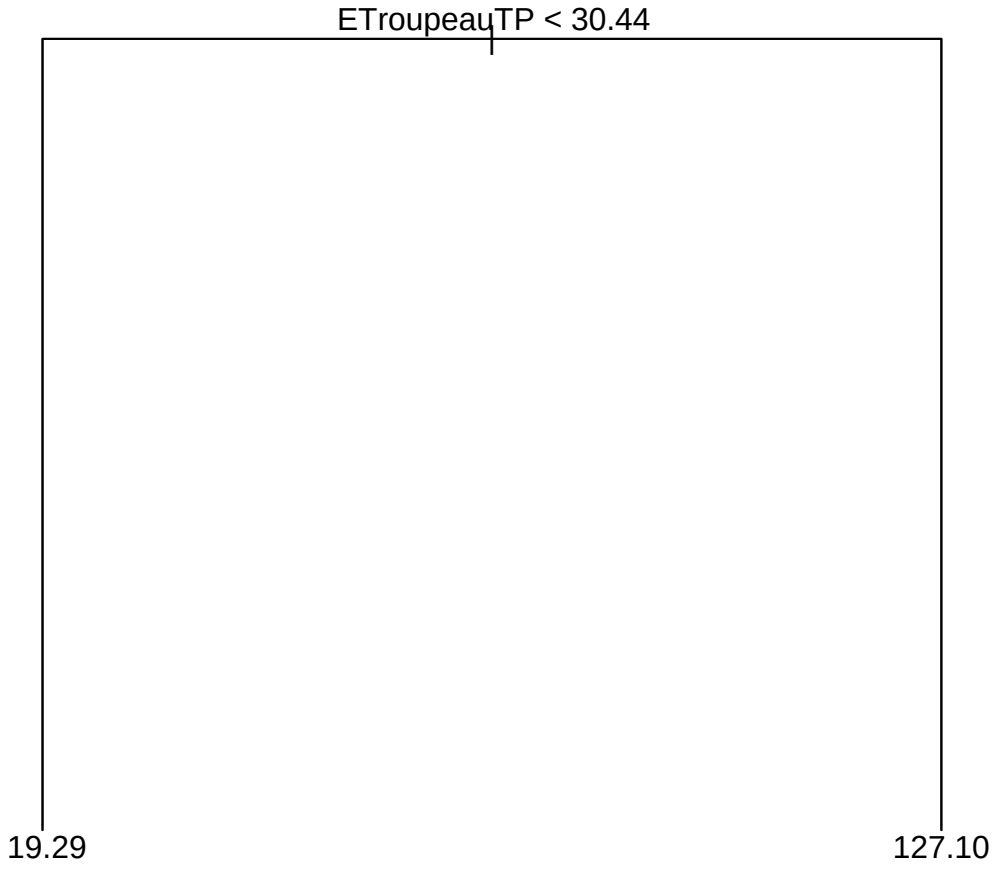
- Point de départ : l'échantillon complet [Nœud 1 : racine]

Règle multivariée de classification

Arbre optimal : séquence de règles binaires optimales définies par récursivité

- Point de départ : l'échantillon complet [Nœud 1 : racine]
- 1ère étape : choix de la meilleure règle binaire [Nœuds N_2 et N_3]

Règle multivariée de classification

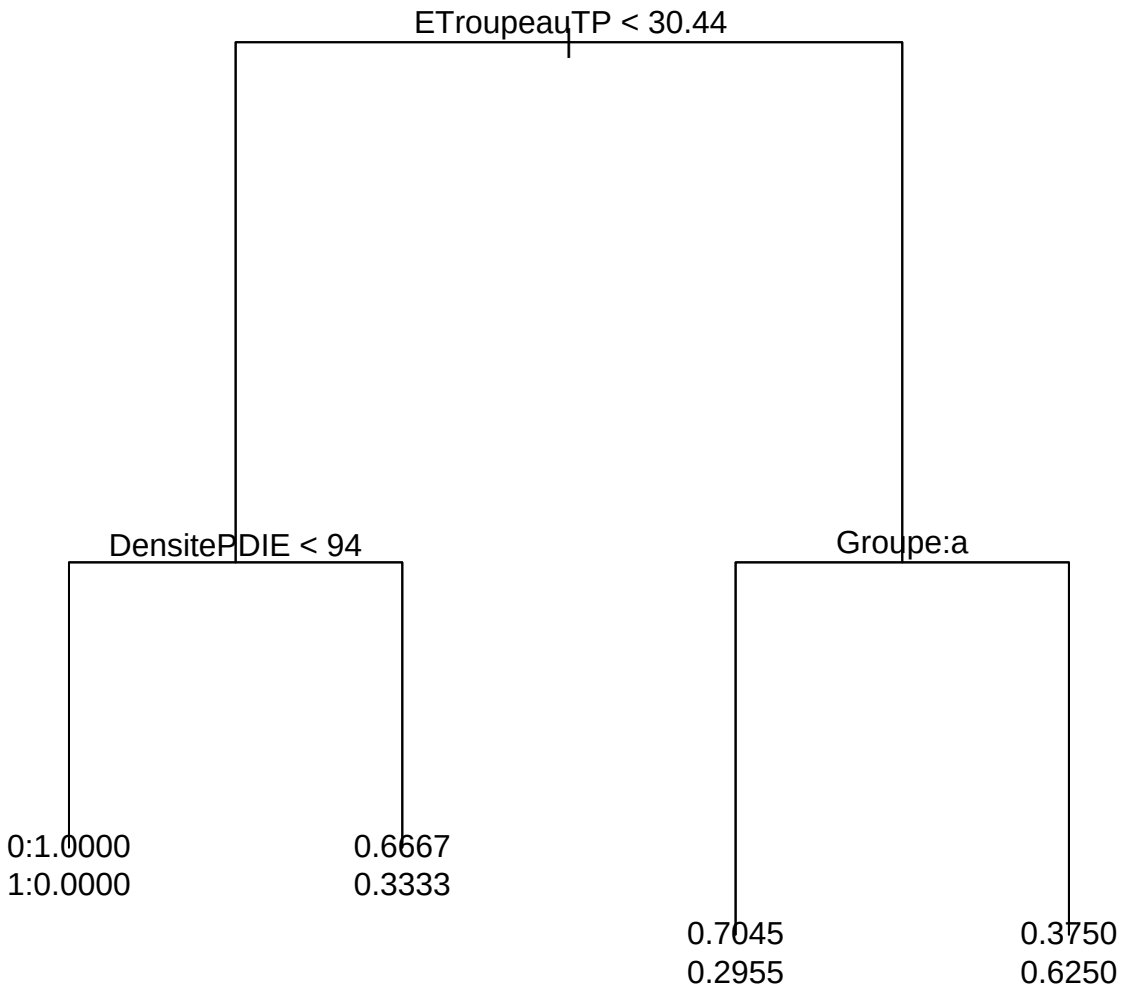


Règle multivariée de classification

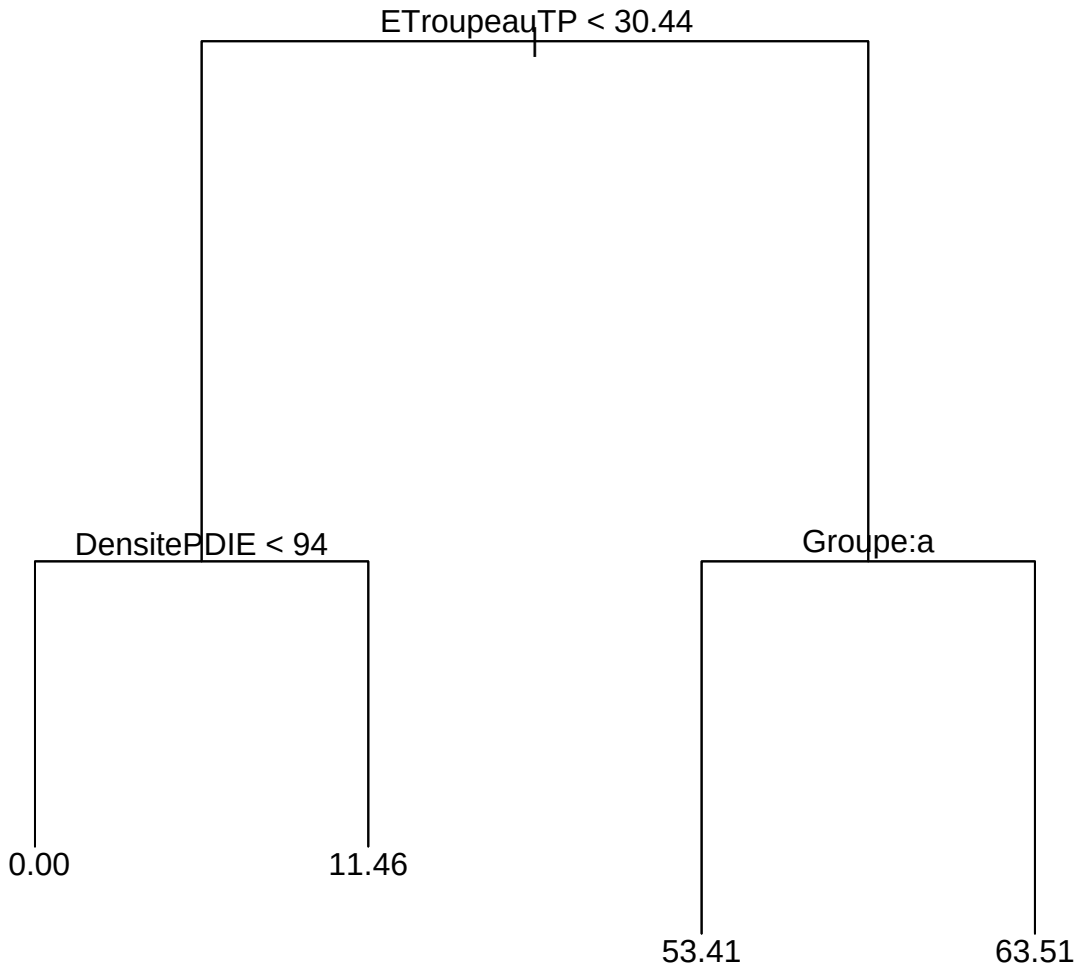
Arbre optimal : séquence de règles binaires optimales définies par récursivité

- Point de départ : l'échantillon complet [Nœud 1 : racine]
- 1ère étape : choix de la meilleure règle binaire [Nœuds N_2 et N_3]
- 2ème étape : choix de la meilleure règle binaire dans N_2 et N_3 [Nœuds N_4, N_5, N_6 et N_7]

Règle multivariée de classification



Règle multivariée de classification



Règle multivariée de classification

Arbre optimal : séquence de règles binaires optimales définies par récursivité

- Point de départ : l'échantillon complet [Nœud 1 : racine]
- 1ère étape : choix de la meilleure règle binaire [Nœuds N_2 et N_3]
- 2ème étape : choix de la meilleure règle binaire dans N_2 et N_3 [Nœuds N_4, N_5, N_6 et N_7]
- 3ème étape : choix de la meilleure règle binaire dans N_4, N_5, ...

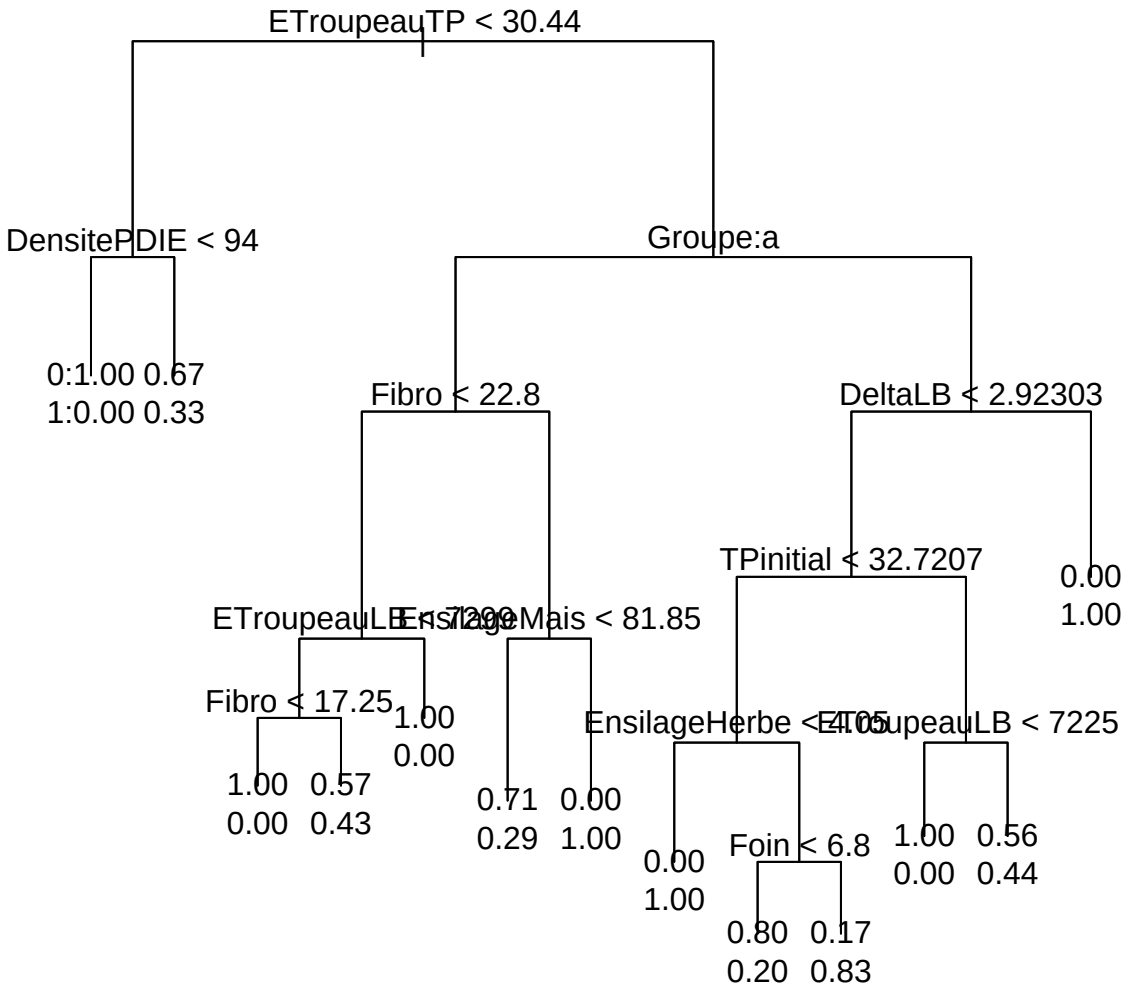
Règle multivariée de classification

Arbre optimal : séquence de règles binaires optimales définies par récursivité

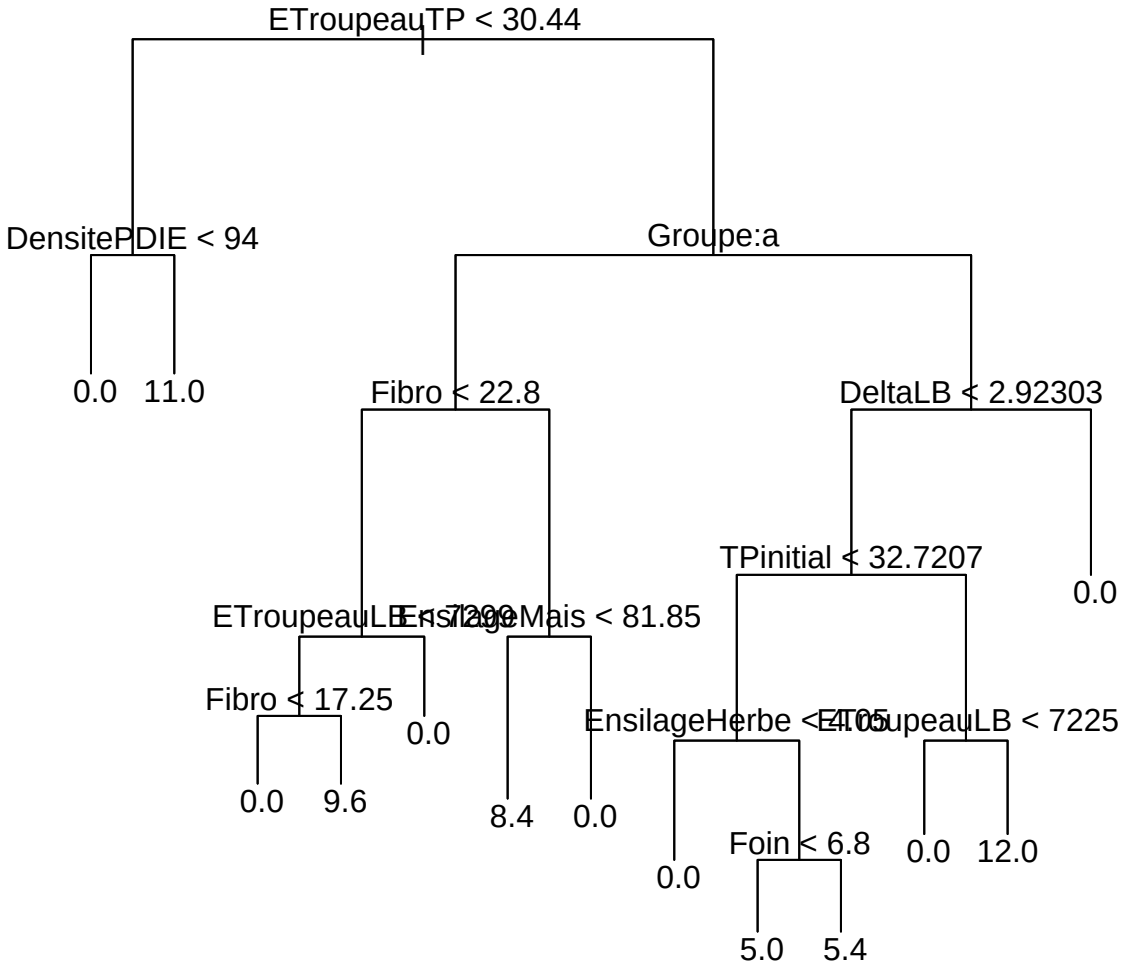
- Point de départ : l'échantillon complet [Nœud 1 : racine]
- 1ère étape : choix de la meilleure règle binaire [Nœuds N_2 et N_3]
- 2ème étape : choix de la meilleure règle binaire dans N_2 et N_3 [Nœuds N_4, N_5, N_6 et N_7]
- 3ème étape : choix de la meilleure règle binaire dans N_4, N_5, ...

Critères d'arrêt : déviance nulle ou nombre d'individus trop faibles dans un nœud terminal

Règle multivariée de classification



Règle multivariée de classification



Règle multivariée de classification

Arbre optimal : séquence de règles binaires optimales définies par récursivité

- Point de départ : l'échantillon complet [Nœud 1 : racine]
- 1ère étape : choix de la meilleure règle binaire [Nœuds N_2 et N_3]
- 2ème étape : choix de la meilleure règle binaire dans N_2 et N_3 [Nœuds N_4, N_5, N_6 et N_7]
- 3ème étape : choix de la meilleure règle binaire dans N_4, N_5, ...

Critères d'arrêt : déviance nulle ou nombre d'individus trop faibles dans un nœud terminal

Taille d'un arbre : nombre de nœuds terminaux [feuilles]

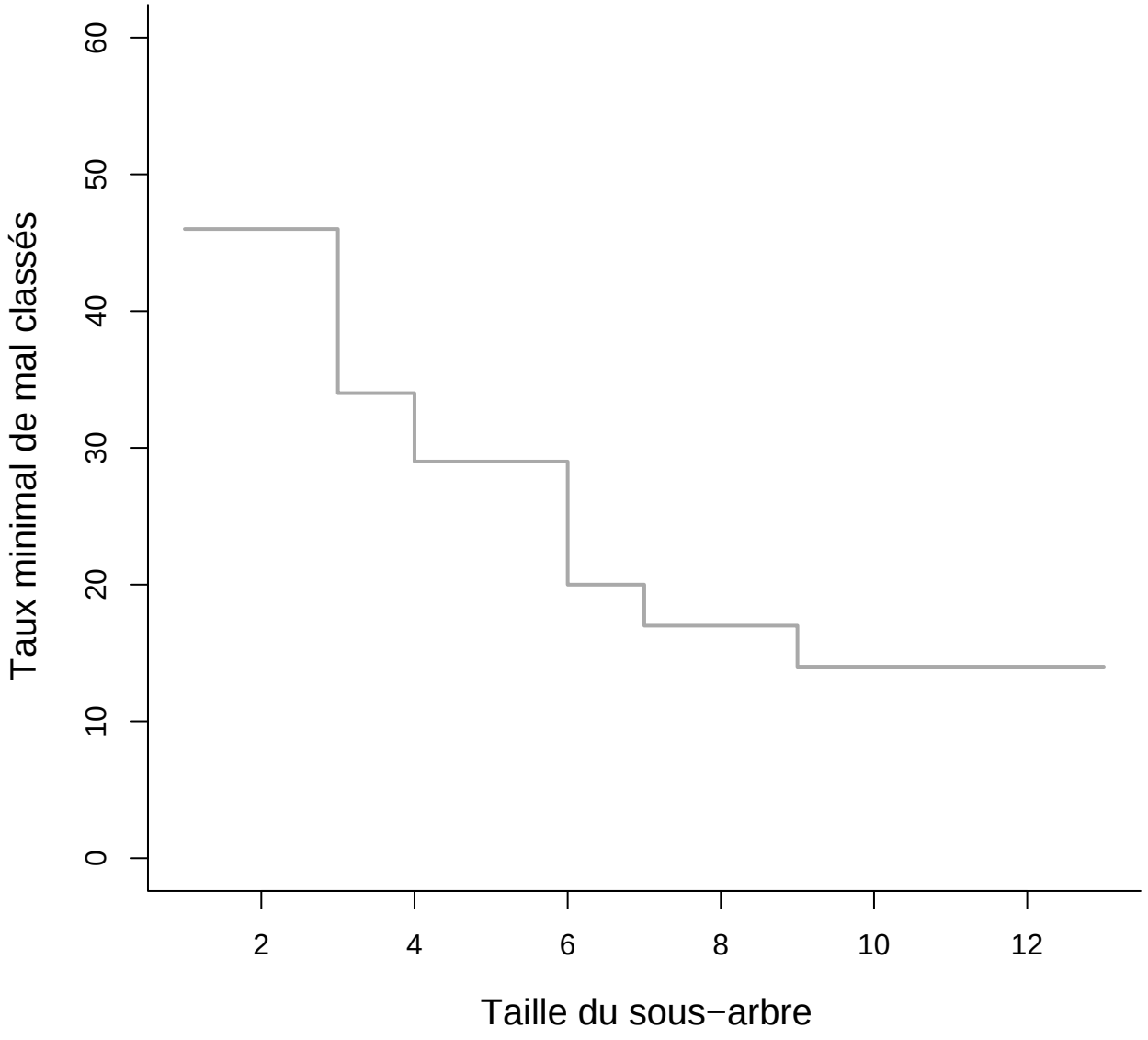
Déviance d'un arbre : somme des déviances de ses feuilles

Élagage de l'arbre

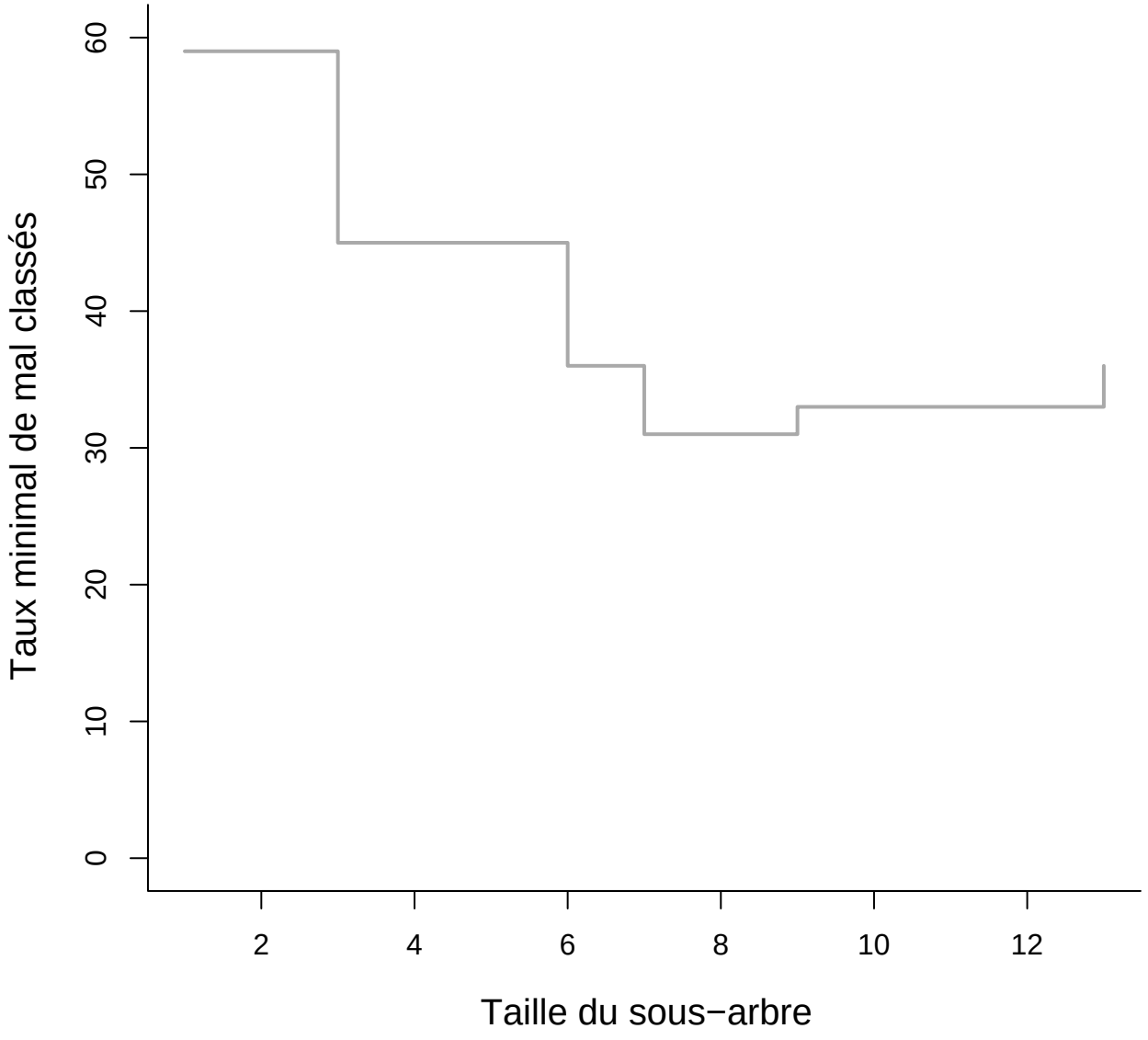
Soit K la taille de l'arbre optimal,

l'arbre optimal de taille $k \leq K$ est un sous-arbre de l'arbre optimal

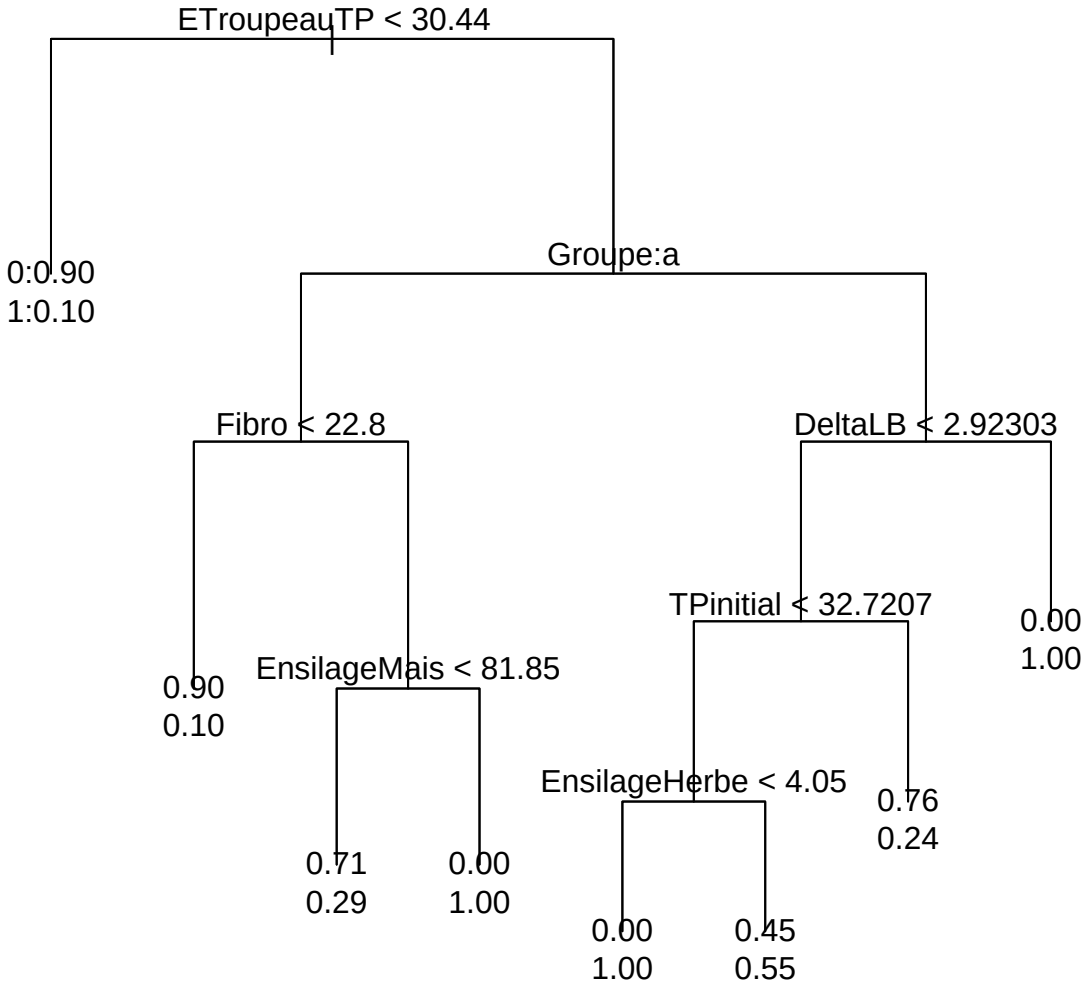
Élagage de l'arbre



Élagage de l'arbre



Élagage de l'arbre



Élagage de l'arbre

Soit K la taille de l'arbre optimal,

l'arbre optimal de taille $k \leq K$ est un sous-arbre de l'arbre optimal

Matrice de confusion

	Affectations		
Observations	0	1	Total
0	70	5	75
1	12	34	46

Élagage de l'arbre

Soit K la taille de l'arbre optimal,

l'arbre optimal de taille $k \leq K$ est un sous-arbre de l'arbre optimal

Matrice de confusion

	Affectations		
Observations	0	1	
0	93.3	6.7	100
1	26.1	73.9	100

Plan du cours

Bilan

	2 modalités	>2 modalités	$\geq$ 2 modalités
	Modèle logistique	Modèle logistique logistique multinomial	Arbre de classification
Explication	•	•	
Prédiction	•	•	•
Mise en œuvre			•