Tests d'hypothèses

David Causeur
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Agrocampus Rennes
IRMAR CNRS UMR 6625
http://www.agrocampus-rennes.fr/math/causeur/

Plan de la présentation

1. Introduction
   - Choix entre deux hypothèses
   - Stratégie de test
2. Tests d'hypothèses
   - Règle de décision et risques d'erreurs
   - Contrôle du risque de 1ère espèce
   - Contrôle de la puissance
3. Comparaison de deux populations
   - Comparaison de variances
   - Comparaison de moyennes
4. Bilan et Perspectives

Introduction

- Analyse de données sensorielles

Introduction

- Analyse de données sensorielles

Expert	Age	Sexe	Produit	Séance	Note hédonique
Sébastien	32	M	Jus 1	Matin	3/10
Maela	22	F	Jus 1	Matin	6/10
François	78	M	Jus 2	Midi	1/10
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Introduction

- Analyse de données sensorielles

Expert	Age	Sexe	Produit	Séance	Note hédonique
Sébastien	32	M	Jus 1	Matin	3/10
Maela	22	F	Jus 1	Matin	6/10
François	78	M	Jus 2	Midi	1/10
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

- Le process de fabrication est-il conforme aux normes ?

Introduction

- Analyse de données sensorielles

Expert	Age	Sexe	Produit	Séance	Note hédonique
Sébastien	32	M	Jus 1	Matin	3/10
Maela	22	F	Jus 1	Matin	6/10
François	78	M	Jus 2	Midi	1/10
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

- Le process de fabrication est-il conforme aux normes ?

Bouteille	Volume (ml)	Produit	Ligne
1	105	Jus 1	A
2	99	Jus 2	A
3	107	Jus 1	B
⋮	⋮	⋮	⋮

Le process est-il conforme ?

X : volume embouteillé (variable aléatoire)

- le process est conforme si $\mu =$ 100 ml litre où

$$\mu = \mathbb{E}(X)$$

Le process est-il conforme ?

X : volume embouteillé (variable aléatoire)

- le process est conforme si $\mu = 100$ ml litre où
$$\mu = \mathbb{E}(X)$$
- Ce que l'on sait faire : intervalle de confiance de μ

Le process est-il conforme ?

X : volume embouteillé (variable aléatoire)

- le process est conforme si $\mu = 100$ ml litre où

$$\mu = \mathbb{E}(X)$$

- Ce que l'on sait faire : intervalle de confiance de μ
- Et après ? : le process est-il conforme ? oui ou non ?

Problématique

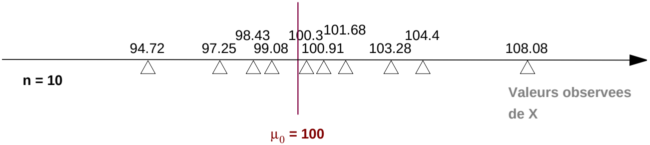
Choix entre deux hypothèses

- Le process est-il conforme ?
- Les produits sont-ils perçus différemment ?
- La consommation dépend-t'elle de la CSP ?
- …

Plan de la présentation

1. Introduction
   - Choix entre deux hypothèses
   - Stratégie de test
2. Tests d'hypothèses
   - Règle de décision et risques d'erreurs
   - Contrôle du risque de 1ère espèce
   - Contrôle de la puissance
3. Comparaison de deux populations
   - Comparaison de variances
   - Comparaison de moyennes
4. Bilan et Perspectives

Quelle démarche pour construire une règle de décision ?

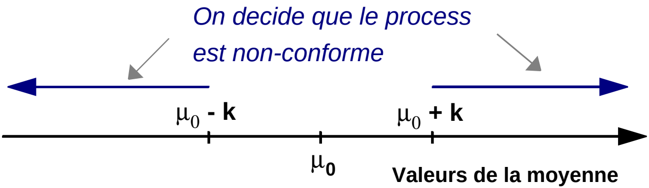


Quelle démarche pour construire une règle de décision ?

- Si $\bar{X}$ est proche de $\mu_0 = 100$ ml, on décide que le process est conforme
- Sinon, on décide que le process n'est pas conforme

Quelle démarche pour construire une règle de décision ?

- Si $\bar{X}$ est proche de $\mu_0 = 100$ ml, on décide que le process est conforme
- Sinon, on décide que le process n'est pas conforme



Deux types d'erreur

- Décider à tort que le process est conforme (non-détection)
- Décider à tort que le process n'est pas conforme (fausse alarme)

La stratégie dépend de l'importance relative des risques

- Stratégie 1, on décide que le process n'est pas conforme si $|\bar{X} - \mu_0| > 1$ ml
- Stratégie 2, on décide que le process n'est pas conforme si $|\bar{X} - \mu_0| > 10$ ml

Deux types d'erreur

- Décider à tort que le process est conforme (non-détection)
- Décider à tort que le process n'est pas conforme (fausse alarme)

La stratégie dépend de l'importance relative des risques

- Stratégie 1, on décide que le process n'est pas conforme si $|\bar{X} - \mu_0| > 1$ ml
- Stratégie 2, on décide que le process n'est pas conforme si $|\bar{X} - \mu_0| > 10$ ml

La stratégie 2 réduit le risque de fausse alarme

Deux types d'erreur

- Décider à tort que le process est conforme (non-détection)
- Décider à tort que le process n'est pas conforme (fausse alarme)

La stratégie dépend de l'importance relative des risques

- Stratégie 1, on décide que le process n'est pas conforme si $|\bar{X} - \mu_0| > 1$ ml
- Stratégie 2, on décide que le process n'est pas conforme si $|\bar{X} - \mu_0| > 10$ ml

La stratégie 2 réduit le risque de fausse alarme . . .
mais augmente le risque de non-détection

De manière générale

2 hypothèses

$$\begin{cases} H_0: & \text{Hypothèse nulle} \\ H_1: & \text{Hypothèse alternative} \end{cases}$$

De manière générale

2 hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : & \text{Hypothèse nulle} \\ H_1 : & \text{Hypothèse alternative} \end{cases}$$

2 types d'erreur

$$\begin{cases} \text{Décider à tort de rejeter } H_0 & \text{Erreur de 1ère espèce} \\ \text{Décider à tort de ne pas rejeter } H_0 & \text{Erreur de 2ème espèce} \end{cases}$$

Risques d'erreur

Décision	Vérité: H$_0$	Vérité: H$_1$
H$_0$		β Risque de 2nde espèce
H$_1$	α Risque de 1ère espèce	

Risques d'erreur

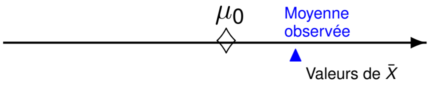
Décision	Vérité H$_0$	Vérité H$_1$
H$_0$	$1 - \alpha$	β Risque de 2nde espèce
H$_1$	α Risque de 1ère espèce	$1 - \beta$ Puissance

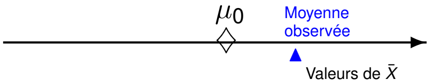
Risques d'erreur

Décision	Vérité : H_0	Vérité : H_1
H_0	$1-\alpha$	β Risque de 2nde espèce
H_1	α Risque de 1ère espèce	$1-\beta$ Puissance

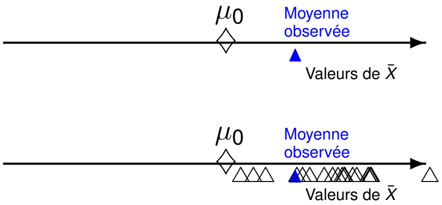
Le plus souvent, α est fixé (par exemple, $\alpha = 0.05$)

Quelle valeur pour k ?

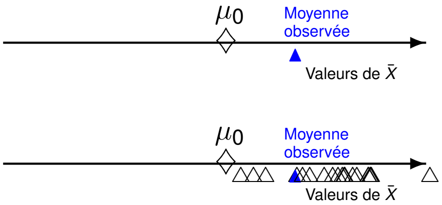




Quelle valeur pour k ?

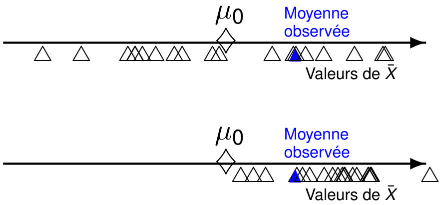


Quelle valeur pour k ?



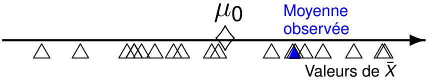
Process non-conforme

Quelle valeur pour k ?

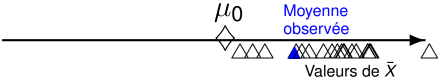


Process non-conforme

Quelle valeur pour k ?

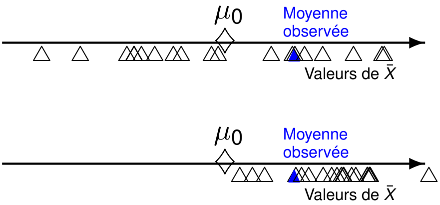


Process conforme



Process non-conforme

Quelle valeur pour k ?



Process conforme

Process non-conforme

Idée : mesurer l'écart entre $\bar{X}$ et μ_0 par rapport à la précision de l'estimation

$$\begin{cases} \text{Si } \frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\hat{\sigma}(\bar{X})} \geq k^* & \text{alors} \quad \text{process non} - \text{conforme} \\ \text{Si } \frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\hat{\sigma}(\bar{X})} < k^* & \text{alors} \quad \text{process conforme} \end{cases}$$

Stratégie de test

Information disponible $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Stratégie de test

Information disponible $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$$\Downarrow$$

Statistique de test $T(X)$

Stratégie de test

Information disponible $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$\Downarrow$$

Statistique de test $T(X)$

$$\Downarrow$$

Région de rejet $\mathcal{R}$ de l'hypothèse de conformité

Si $T(X) \in \mathcal{R}$, *on rejette l'hypothèse de conformité*

Règle de décision effective

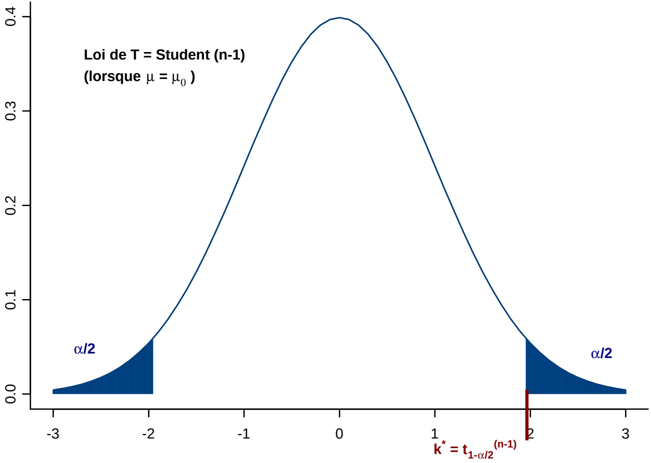
Si

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}(\bar{X})},$$

alors

$$\alpha = \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(|T| \geq k^*\right)$$

Règle de décision effective



Règle de décision effective

Si

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}(\bar{X})},$$

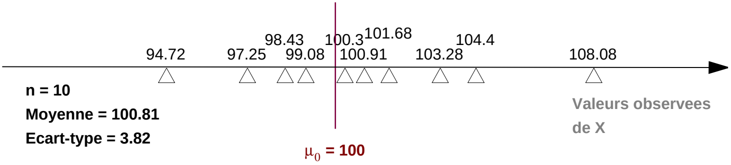
alors

$$\alpha = \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(|T| \geq k^*\right)$$

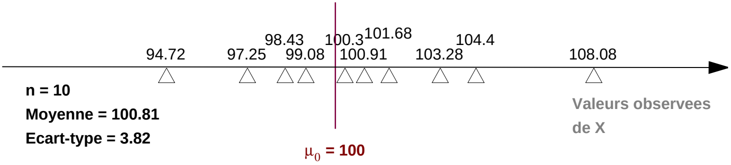
Région de rejet de l'hypothèse de conformité

$$\bar{X} \in \left]-\infty, \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{S'}{\sqrt{n}}\right] \bigcup \left[\mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{S'}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$$

Exemple


94.72
97.25
98.43
99.08
100.3
100.91
101.68
103.28
104.4
108.08
n = 10
Moyenne = 100.81
Ecart-type = 3.82
μ_0 = 100
Valeurs observees
de X

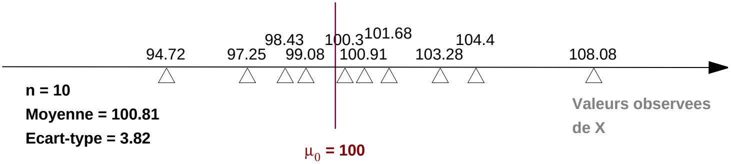
Exemple



Région de rejet de l'hypothèse de conformité

$$\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{3.82}{\sqrt{10}}} \geq 2.26$$

Exemple

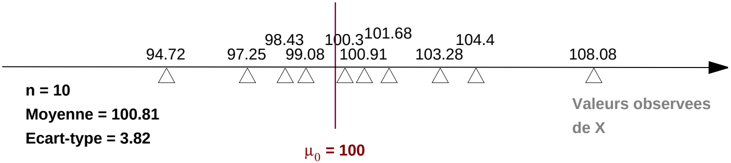


Région de rejet de l'hypothèse de conformité

$$\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{3.82}{\sqrt{10}}} \geq 2.26$$

Or $\bar{X} = 100.81$ ($T = 0.67$) ...

Exemple



Région de rejet de l'hypothèse de conformité

$$\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{3.82}{\sqrt{10}}} \geq 2.26$$

Or $\bar{X} = 100.81$ ($T = 0.67$) ... Quel risque prend-t'on ?

Quel risque si je décide que le process est conforme ?

A partir de quand le process est-t'il non conforme ?

$$\begin{cases} \text{Process conforme} & \Leftrightarrow \quad \mu = \mu_0 \\ \text{Process non} - \text{conforme} & \Leftrightarrow \quad \mu = \mu_0 - 1 \end{cases}$$

Quel risque si je décide que le process est conforme ?

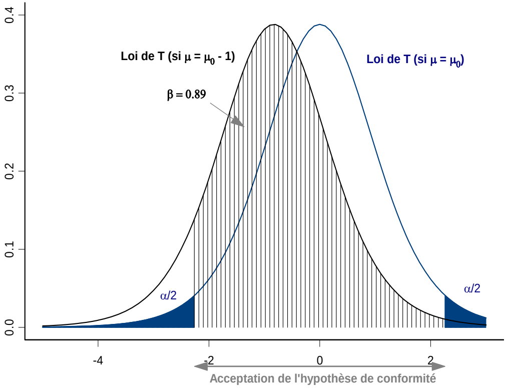
A partir de quand le process est-t'il non conforme ?

$$\begin{cases} \text{Process conforme} & \Leftrightarrow \quad \mu = \mu_0 \\ \text{Process non} - \text{conforme} & \Leftrightarrow \quad \mu = \mu_0 - 1 \end{cases}$$

Calcul de la puissance du test

$$1 - \beta \quad = \quad \mathbb{P}_{\mu=\mu_0-1}\left(|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}\right)$$

Quel risque si je décide que le process est conforme ?



Quel risque si je décide que le process est conforme ?

A partir de quand le process est-t'il non conforme ?

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{Process conforme} & \Leftrightarrow & \mu = \mu_0 \\ \text{Process non} - \text{conforme} & \Leftrightarrow & \mu = \mu_0 - 1 \end{array} \right.$$

Calcul de la puissance du test

$$1 - \beta \quad = \quad \mathbb{P}_{\mu=\mu_0-1}\left(|T| \geq t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Puissance : 0.11

Améliorer la puissance

A partir de quand le process est-t'il non conforme ?

$$\begin{cases} \text{Process conforme} & \Leftrightarrow \quad \mu = \mu_0 \\ \text{Process non} - \text{conforme} & \Leftrightarrow \quad \mu = \mu_0 - 5 \end{cases}$$

Améliorer la puissance

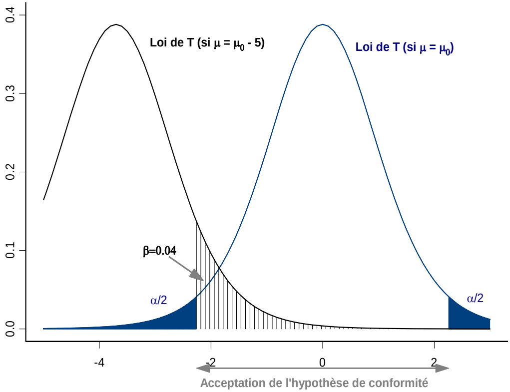
A partir de quand le process est-t'il non conforme ?

$$\begin{cases} \text{Process conforme} & \Leftrightarrow \quad \mu = \mu_0 \\ \text{Process non} - \text{conforme} & \Leftrightarrow \quad \mu = \mu_0 - 5 \end{cases}$$

Calcul de la puissance du test

$$1 - \beta \quad = \quad \mathbb{P}_{\mu=\mu_0-1}\left(|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}\right)$$

Améliorer la puissance



Améliorer la puissance

A partir de quand le process est-t'il non conforme ?

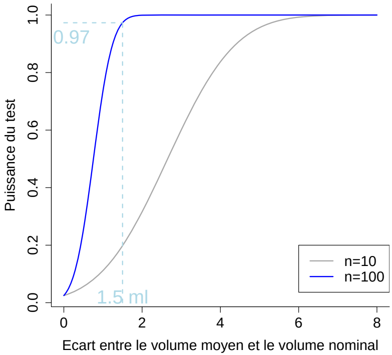
$$\begin{cases} \text{Process conforme} & \Leftrightarrow \quad \mu = \mu_0 \\ \text{Process non} - \text{conforme} & \Leftrightarrow \quad \mu = \mu_0 - 5 \end{cases}$$

Calcul de la puissance du test

$$1 - \beta \quad = \quad \mathbb{P}_{\mu=\mu_0-1}\left(|T| \geq t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

Puissance : 0.96

Améliorer la puissance



Et si $n = 100$?

Confirmation des estimations : $\bar{X} = 100.93$, $S' = 3.72$

Décision

$$T = \frac{|100.93 - 100|}{\frac{3.72}{\sqrt{100}}} = 2.50 \quad \geq \quad 1.96$$

Et si $n = 100$?

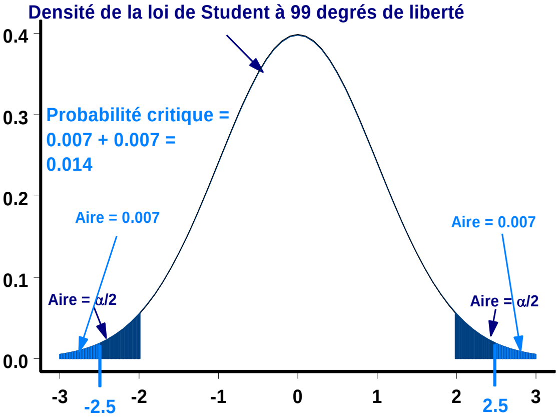
Confirmation des estimations : $\bar{X} = 100.93$, $S' = 3.72$

Décision

$$T = \frac{|100.93 - 100|}{\frac{3.72}{\sqrt{100}}} = 2.50 \quad \geq \quad 1.96$$

donc on rejette l'hypothèse de conformité avec le risque d'erreur suivant :

Et si $n = 100$?


Densité de la loi de Student à 99 degrés de liberté
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
Probabilité critique =
0.007 + 0.007 =
0.014
Aire = 0.007
Aire = 0.007
Aire = α/2
Aire = α/2
-3
-2.5
-2
-1
0
1
2
2.5
3

Et si $n = 100$?

Confirmation des estimations : $\bar{X} = 100.93$, $S' = 3.72$

Décision

$$T = \frac{|100.93 - 100|}{\frac{3.72}{\sqrt{100}}} = 2.50 \quad \geq \quad 1.96$$

donc on rejette l'hypothèse de conformité avec le risque d'erreur suivant :

$$\mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(|T| \geq 2.50\right) = 0.014$$

Et si $n = 100$?

Confirmation des estimations : $\bar{X} = 100.93$, $S' = 3.72$

Décision

$$T = \frac{|100.93 - 100|}{\frac{3.72}{\sqrt{100}}} = 2.50 \quad \geq \quad 1.96$$

donc on rejette l'hypothèse de conformité avec le risque d'erreur suivant :

Probabilité critique

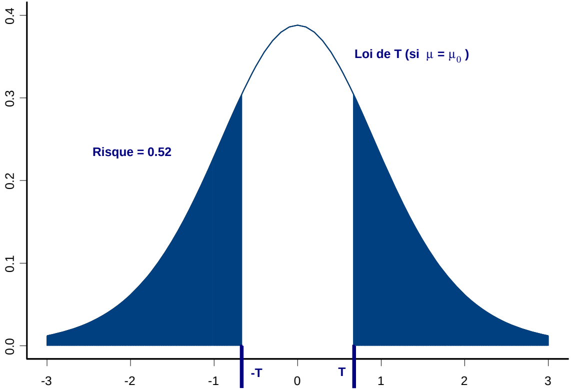
$$\mathbb{P}_{\mu=\mu_0}\left(|T| \geq 2.50\right) = 0.014$$

Probabilité critique pour $n = 10$

Probabilité critique = $\mathbb{P}_{\mu=\mu_0}(|T| \geq 0.67)$

Probabilité critique pour $n = 10$

Probabilité critique = $\mathbb{P}_{\mu=\mu_0}(|T| \geq 0.67)$



Test unilatéral et bilatéral

Le plus souvent,

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : & \theta = \theta_0 \\ \mathrm{H}_1 : & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

$\mathcal{R}$ est symétrique : test bilatéral

Test unilatéral et bilatéral

Le plus souvent,

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : & \theta = \theta_0 \\ \mathrm{H}_1 : & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

$\mathcal{R}$ est symétrique : test bilatéral

Mais parfois

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : & \theta = \theta_0 \\ \mathrm{H}_1 : & \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

$\mathcal{R}$ n'est pas symétrique : test unilatéral

Plan de la présentation

1. Introduction
   - Choix entre deux hypothèses
   - Stratégie de test
2. Tests d'hypothèses
   - Règle de décision et risques d'erreurs
   - Contrôle du risque de 1ère espèce
   - Contrôle de la puissance
3. Comparaison de deux populations
   - Comparaison de variances
   - Comparaison de moyennes
4. Bilan et Perspectives

Comparaison de 2 populations

Problématique

- Les 2 marques sont-elles perçues différemment ?

Comparaison de 2 populations

Problématique

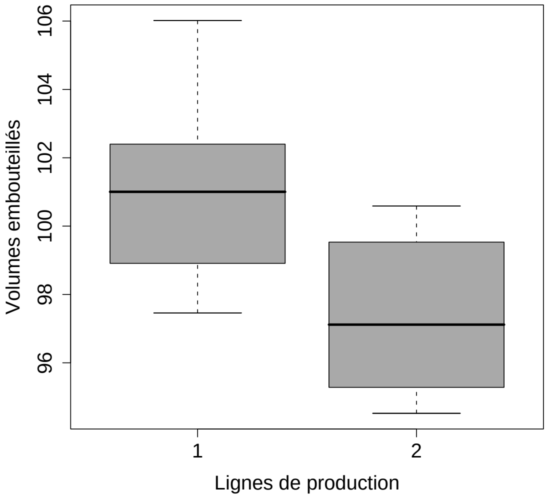
- Les 2 marques sont-elles perçues différemment ?
- Les filles sont-elles meilleures que les garçons ?

Comparaison de 2 populations

Problématique

- Les 2 marques sont-elles perçues différemment ?
- Les filles sont-elles meilleures que les garçons ?
- La campagne publicitaire a-t'elle eu un impact ?
- …

Comparaison de 2 lignes de production



Comparaison de 2 variances

Une variable X

$$X \sim \begin{cases} \mathcal{N}(\mu_1; \sigma_1) & \text{pour les individus de } \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{N}(\mu_2; \sigma_2) & \text{pour les individus de } \mathcal{P}_2 \end{cases}$$

Test d'hypothèses

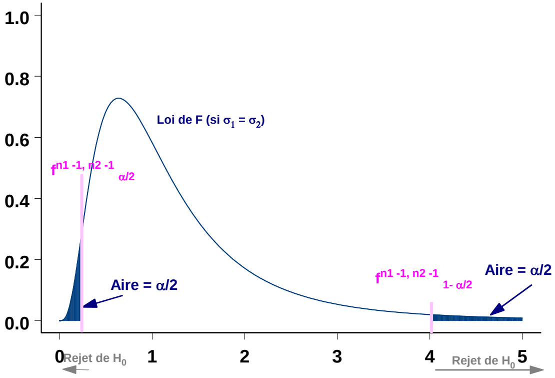
$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : & \sigma_1 = \sigma_2 \\ \mathrm{H}_1 : & \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

Stratégie de test

Statistique de test

$$F = \frac{S_1'^2}{S_2'^2} \sim_{\text{Si } \sigma_1=\sigma_2} \mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1}$$

Stratégie de test



Stratégie de test

Statistique de test

$$F \;=\; \frac{S_1'^2}{S_2'^2} \sim_{\text{Si } \sigma_1=\sigma_2} \mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1}$$

Région critique

$$F \geq f_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1-1,n_2-1)} \text{ ou } F \leq f_{\frac{\alpha}{2}}^{(n_1-1,n_2-1)} \;\Rightarrow\; \text{On rejette } \mathrm{H}_0$$

Exemple

Tailles d'échantillons : $n_1 = n_2 = 10$

Écarts-types estimés : $S'_1 = 3.00,\ S'_2 = 2.35$

Décision : $f_{0.025}^{(9,9)} = 0.25 \leq F = 1.64 \leq f_{0.975}^{(9,9)} = 4.02$

Exemple

Tailles d'échantillons : $n_1 = n_2 = 10$

Écarts-types estimés : $S'_1 = 3.00,\ S'_2 = 2.35$

Décision : $f_{0.025}^{(9,9)} = 0.25 \leq F = 1.64 \leq f_{0.975}^{(9,9)} = 4.02$

$S_1'^2$ et $S_2'^2$ **estimateurs de** σ^2 $\Rightarrow$ Estimateur combiné

$$\begin{aligned} S'^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i^{(1)} - \bar{X}^{(1)})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_i^{(2)} - \bar{X}^{(2)})^2}{n_1 + n_2 - 2}, \\ &= \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_1'^2 + \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_2'^2 \end{aligned}$$

Comparaison de 2 moyennes

2 populations $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

Une variable X

$$X \sim \begin{cases} \mathcal{N}(\mu_1;\sigma) & \text{Pour les individus de } \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{N}(\mu_2;\sigma) & \text{Pour les individus de } \mathcal{P}_2 \end{cases}$$

Test d'hypothèse

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : & \mu_1 = \mu_2 \\ \mathrm{H}_1 : & \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

Stratégie de test

2 échantillons

$$\begin{cases} X_1^{(1)},\ X_2^{(1)}, \ldots, X_{n_1}^{(1)} & \text{Pour les individus extraits de } \mathcal{P}_1 \\ X_1^{(2)},\ X_2^{(2)}, \ldots, X_{n_2}^{(2)} & \text{Pour les individus extraits de } \mathcal{P}_2 \end{cases}$$

Stratégie de test

2 échantillons

$$\begin{cases} X_1^{(1)},\ X_2^{(1)}, \ldots, X_{n_1}^{(1)} & \text{Pour les individus extraits de } \mathcal{P}_1 \\ X_1^{(2)},\ X_2^{(2)}, \ldots, X_{n_2}^{(2)} & \text{Pour les individus extraits de } \mathcal{P}_2 \end{cases}$$

Statistique de test

$$T = \frac{\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)})}}$$

Calcul de T

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \\
\widehat{\mathrm{Var}}(\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) &= \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)
\end{aligned}$$

Calcul de T

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) &= \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\\ \widehat{\mathrm{Var}}(\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) &= \hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\end{aligned}$$

Avec $\hat{\sigma}^2 = S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i^{(1)} - \bar{X}^{(1)})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_i^{(2)} - \bar{X}^{(2)})^2}{n_1+n_2-2}$

Calcul de T

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\\ \widehat{\mathrm{Var}}(\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) &= \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\end{aligned}$$

Avec $\hat{\sigma}^2 = S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i^{(1)} - \bar{X}^{(1)})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_i^{(2)} - \bar{X}^{(2)})^2}{n_1+n_2-2}$

$$T \sim_{H_0} T_{n_1+n_2-2}$$

Exemple

Tailles d'échantillons : $n_1 = n_2 = 10$

Moyennes estimées : $\bar{X}_1 = 101.22, \ \bar{X}_2 = 97.59$
Écart-type estimé : $S' = 2.69$

Décision : $T = 3.05$, Probabilité critique : 0.007

Plan de la présentation

1. Introduction
   - Choix entre deux hypothèses
   - Stratégie de test
2. Tests d'hypothèses
   - Règle de décision et risques d'erreurs
   - Contrôle du risque de 1ère espèce
   - Contrôle de la puissance
3. Comparaison de deux populations
   - Comparaison de variances
   - Comparaison de moyennes
4. Bilan et Perspectives

Bilan et perspectives

Tests d'hypothèses

- Remise en cause d'une hypothèse nulle

Bilan et perspectives

Tests d'hypothèses

- Remise en cause d'une hypothèse nulle
- Contrôle de la puissance par la taille d'échantillon

Bilan et perspectives

Tests d'hypothèses

- Remise en cause d'une hypothèse nulle
- Contrôle de la puissance par la taille d'échantillon
- Un exemple récurrent : la comparaison de populations

Bilan et perspectives

Tests d'hypothèses

- Remise en cause d'une hypothèse nulle
- Contrôle de la puissance par la taille d'échantillon
- Un exemple récurrent : la comparaison de populations

Extensions

- Comparaison de plusieurs populations

Bilan et perspectives

Tests d'hypothèses

- Remise en cause d'une hypothèse nulle
- Contrôle de la puissance par la taille d'échantillon
- Un exemple récurrent : la comparaison de populations

Extensions

- Comparaison de plusieurs populations
- Etude d'effets de plusieurs facteurs